

Università degli Studi di Pisa

Dottorato di Ricerca in Fisica
X Ciclo 1994-1997

Tesi di Dottorato in Fisica

**Identificazione dello spettro di rumore di
VIRGO
e metodi di rivelazione dei segnali
gravitazionali**

Candidato: Dr.ssa Elena Cuoco

RELATORE: Prof. Giuseppe Curci

Alla mia famiglia

Indice

Introduzione	1
1 Segnali di onde gravitazionali	5
1.1 Caratteristiche del segnale gravitazionale	5
1.1.1 Il formalismo di quadrupolo	7
1.2 Segnali gravitazionali	8
1.2.1 Segnali monocromatici	8
1.2.2 Segnali transienti	12
2 Come rivelare le onde gravitazionali	17
2.1 Esperimenti di rivelazione	17
2.2 L'interferometro VIRGO	20
2.2.1 Il superattenuatore	22
3 Lo spettro di rumore di VIRGO	27
3.1 Sorgenti di rumore	27
3.1.1 Rumore sismico	28
3.1.2 Rumore <i>shot</i>	28
3.1.3 Pressione di radiazione	30
3.1.4 Rumore quantistico	30
3.1.5 Rumore termico	30
3.2 Stima dello spettro del rumore newtoniano	33
3.2.1 Modello di Saulson (Modello I)	34
3.2.2 Un modello più dettagliato (Modello II)	36
3.2.3 Modello Elastico (Modello III)	37
3.2.4 Funzione di trasferimento sismico-newtoniano	39
3.2.5 Spettro di rumore newtoniano	40
3.3 Curva di sensibilità di VIRGO	46

4	Algoritmi per la rivelazione del segnale gravitazionale	47
4.1	Approccio alla Bayes	48
4.1.1	Rivelazione di segnali in un fondo di rumore stazionario gaussiano	49
4.1.2	Rapporto segnale–rumore	51
4.1.3	Misura dei parametri del segnale	52
4.2	Rivelazione di segnali periodici	54
4.2.1	Descrizione del segnale ricevuto	56
4.2.2	Metodo di Lomb	57
4.3	Rivelazione di fenomeni di coalescenza	61
4.3.1	Stima del rapporto segnale–rumore	62
4.3.2	Correlazione tra filtri	63
4.4	Una possibile implementazione degli algoritmi su APEmille	65
4.4.1	Inseguimento in linea delle pulsar note	65
4.4.2	Prefiltraggio in linea per i segnali di coalescenza	66
4.5	Filtraggi sub–ottimali	69
4.5.1	Analisi in Wavelet	69
4.5.2	Trasformata wavelet continua	69
4.5.3	Applicazione a segnali modulati in frequenza	70
4.6	Alcuni risultati su simulazioni numeriche	72
4.7	Robustezza dell’algoritmo rispetto alla forma d’onda del segnale	77
5	Modellizzazione di processi stocastici stazionari e gaussiani	83
5.1	Processi stocastici discreti	84
5.2	Metodi non parametrici	86
5.2.1	Fattorizzazione spettrale	86
5.2.2	Il periodogramma	88
5.3	Metodi parametrici	89
5.3.1	Modello autoregressivo (AR)	90
5.3.2	Modello a media mobile (MA)	92
5.3.3	Modello autoregressivo a media mobile (ARMA)	92
5.4	Alcuni esempi di modellizzazione parametrica	94
5.4.1	Rumore Rosa	94
5.4.2	Spettro di rumore generato dai modi di violino	95
5.5	Modellizzazione dello spettro di rumore di VIRGO	97
5.6	Simulazione del rumore nel dominio del tempo	99

6	Whitening e filtri a reticolo	103
6.1	Predizione Lineare	103
6.1.1	Modello AR e predizione lineare	104
6.2	Predizione lineare e struttura a reticolo	106
6.3	Whitening per lo spettro di rumore di VIRGO	108
6.3.1	Prefiltraggio dello spettro di rumore di VIRGO	109
6.3.2	Selezione dell'ordine del modello AR	109
	Perché i metodi adattivi ?	119
7	Identificazione adattiva dello spettro di rumore di VIRGO	123
7.1	Metodi del gradiente	124
7.1.1	GAL	126
7.1.2	Risultati per lo spettro di rumore di VIRGO	128
7.2	Metodi dei minimi quadrati	131
7.2.1	RLS	132
7.2.2	Risultati per lo spettro di rumore di VIRGO	135
7.3	Algoritmi veloci per i metodi dei minimi quadrati	136
7.3.1	Spazi vettoriali per i filtri RLS	138
7.3.2	LSL	141
7.3.3	Risultati per lo spettro di rumore di VIRGO	142
7.3.4	Statistica dell' LSL	147
7.4	Esempio di identificazione adattiva di un sistema che varia nel tempo	150
	Conclusioni	157
A	Le equazioni delle onde gravitazionali	161
A.1	Le equazioni linearizzate di Einstein	161
A.1.1	Polarizzazione di un'onda gravitazionale	163
A.2	Campo gravitazionale esterno ad una stella di massa M	164
B	Classificazione delle onde di background sismico	165
B.1	Somma sui modi	169
C	Statistica degli estimatori	171
C.1	Criterio di Cramer-Rao	171
C.1.1	Criterio di Cramer-Rao per i parametri AR e per i coefficienti di riflessione	172

D	Filtri	173
D.1	Trasformazione bilineare	173
D.1.1	Filtri passa alto del primo ordine	174
D.1.2	Filtri shelving	174
D.1.3	Filtri di ordine superiore	175
D.1.4	Esempio: filtri di Butterworth	176

Elenco delle figure

1.1	Distribuzione spaziale in coordinate galattiche delle pulsar note. Notare l'addensamento in corrispondenza del piano galattico, in particolare nella direzione del centro.	10
2.1	Effetto di un'onda gravitazionale su un insieme di particelle test.	18
2.2	L'interferometro VIRGO	21
2.3	Schema ottico dell'interferometro VIRGO.	22
2.4	Catena di sospensione per le masse test nell'interferometro VIRGO.	23
2.5	Funzione di trasferimento del superattenuatore dal punto di sospensione dello specchio.	24
3.1	Risultati per il modello di Saulson. Funzione S valutata numericamente per $h = 1$ m con i due limiti asintotici. La relazione tra λ e la frequenza è ottenuta con la velocità di propagazione delle onde simiche $c_L = 1000/s$	35
3.2	Funzione di trasferimento tra il rumore sismico ed il rumore newtoniano. Le quattro curve sono stimate con diversi valori di ξ . Si è supposto lo specchio libero ($H(\omega) = -\omega^2$).	43
3.3	Stima sperimentale del rapporto tra lo spettro di rumore sismico orizzontale e quello verticale.	44
3.4	Curva di sensibilità del rivelatore VIRGO.	46
4.1	Rapporto segnale-rumore massimo per le pulsar catalogate nel catalogo TMLC95	54
4.2	Numero di demodulazioni necessarie al controllo di un dato numero di pulsar note, in funzione del numero di pulsar che si richiede di controllare.	60
4.3	SNR integrato sulla banda $[\nu_{\min}, 1000]$ Hz e normalizzato al SNR totale	63
4.4	Decadimento della funzione di correlazione	64
4.5	Spettro di rumore di VIRGO e spettro ottenuto con un prefiltraggio a basse frequenze.	74
4.6	$\mathcal{L}_{max}(\tau, F)$ in funzione del tempo; SNR=20.	75
4.7	$\mathcal{L}_{max}(\tau, F)$ in funzione del tempo; SNR=15.	76

4.8	$\mathcal{L}_{max}(\tau, F)$ in funzione del tempo per segnale generato da stelle di masse $1.4 M_{\odot}$. SNR= 20.7	77
4.9	$\mathcal{L}_{max}(\tau, F)$ in funzione del tempo in presenza di due segnali gravitazionali. . . .	78
4.10	Distribuzioni della stima del tempo di coalescenza e del suo picco ottenuta su 1000 realizzazioni del processo utilizzando un <i>ridge</i> PN0 per cercare un segnale PN1	80
4.11	Distribuzioni della stima del tempo di coalescenza e del suo picco ottenuta su 1000 realizzazioni del processo utilizzando un <i>ridge</i> PN1 per cercare un segnale PN1	81
5.1	Spettro di rumore $1/f$	94
5.2	Fit per il rumore rosa: In alto AR(128) e AR(256), in centro MA(256) e MA(1024). . . .	95
5.3	Fit per il rumore rosa: a sinistra ARMA(8,8) e a destra ARMA(16,16) rispettiva- mente con $M = 20$ e $M = 40$ per il metodo LSMYWE.	96
5.4	Spettro di rumore generato dai modi di violino.	97
5.5	Modelli AR per il fit allo spettro di rumore generato dai modi di violino.	97
5.6	Dall'alto: modelli AR, MA e ARMA per il fit allo spettro di rumore generato dai modi di violino.	98
5.7	Spettro di rumore di VIRGO.	99
5.8	Dall'alto: AR fit, MA fit, ARMA fit per lo spettro di rumore di VIRGO	100
5.9	Media su 100 simulazioni del processo per uno spettro AR(256).	102
6.1	Filtro di errore di predizione lineare.	104
6.2	Filtro AR.	105
6.3	Singolo stadio del filtro di predizione lineare a reticolo e filtro di predizione lineare a reticolo di ordine P	108
6.4	Spettro di rumore di VIRGO prima del filtraggio e spettro ottenuto con un fil- traggio passa alto.	110
6.5	Funzione di risposta all'impulso per lo spettro di VIRGO prima e dopo l'oper- azione di filtraggio.	110
6.6	Criteri per la selezione dell'ordine del modello AR	112
6.7	Limite di Cramer-Rao per coefficienti di riflessione	113
6.8	Coefficienti di riflessione per un modello AR(292) dello spettro di rumore di VIRGO.	114
6.9	Energia spettrale per intervallo di frequenza $\Delta f = 32$ Hz valori dell'ordine P crescente.	115
6.10	Spettro di rumore di VIRGO e modello AR(292).	116

6.11	Potenza spettrale in ingresso ed uscita di un filtro a reticolo di <i>whitening</i>	117
7.1	Superficie dell'errore quadratico medio	125
7.2	Convergenza dei coefficienti di riflessione al valore vero dopo 4 minuti di dati. . .	128
7.3	Coefficienti di riflessione stimati con l'algoritmo di Durbin e con il metodo GAL. .	129
7.4	Convergenza dei coefficienti AR al valore vero dopo 4 minuti di dati.	130
7.5	Spettro di rumore con coefficienti AR stimati con il metodo GAL e modello AR(292) e spettro teorico di VIRGO.	130
7.6	Spettro della sequenza $e_P^f[n]$ in uscita del filtro GAL mediato su 100 realizzazioni. .	131
7.7	Convergenza dei primi due e degli ultimi due coefficienti AR al valore vero. . . .	135
7.8	Parametri del modello AR stimati con il metodo RLS e con l'algoritmo di Durbin. .	136
7.9	Spettro di rumore di VIRGO stimato con il metodo RLS e modello AR(292). . . .	137
7.10	Proiettore $P[n]$ in funzione di $P[n - 1]$	140
7.11	Convergenza al valore vero dei primi due e degli ultimi due coefficienti AR stimati con l'algoritmo LSL.	143
7.12	Coefficienti AR stimati con il metodo LSL e valori veri del modello AR(292). . .	144
7.13	Spettro di rumore VIRGO con coefficienti AR stimati con il metodo LSL e modello AR(292).	145
7.14	Spettro di rumore VIRGO e spettro della sequenza $e_P^f[n]$ del filtro LSL mediato su 100 realizzazioni.	146
7.15	<i>Bias</i> per i coefficienti di riflessione k_p al tempo $t = 8$ sec e al tempo $t = 64$ sec. .	148
7.16	<i>Bias</i> per i parametri a_p del modello AR al tempo $t = 8$ sec e al tempo $t = 64$ sec. .	148
7.17	Varianza dei coefficienti a_p e limite di Cramer-Rao	149
7.18	Limite di Cramer-Rao per la variabile σ del modello AR	150
7.19	Spettro del modello AR(2)	151
7.20	Coefficienti $a_1[t]$, $a_2[t]$ e coefficienti stimati con l'algoritmo LSL	152
7.21	Spettro di un solo modo di violino	153
7.22	<i>Tracking</i> dell'algoritmo LSL delle oscillazioni dei coefficienti AR.	154
7.23	<i>Tracking</i> dell'algoritmo LSL della oscillazione della frequenza di risonanza. . . .	154
B.1	Modi elastici.	168
D.1	Filtro passa alto	175

Introduzione

La teoria della relatività generale di Einstein prevede che distribuzioni di massa con momento di quadrupolo e con velocità di rotazione prossime a quella della luce possano emettere onde gravitazionali.

In un lavoro [1] del 1975, gli astrofisici Hulse e Taylor mostrarono che la variazione del periodo di rotazione delle stelle di neutroni nella binaria PSR1913+16 poteva essere attribuita ad un'emissione di onde gravitazionali, fornendo così una prova indiretta dell'esistenza delle onde gravitazionali.

La rivelazione sperimentale delle onde gravitazionali avrebbe due importanti conseguenze: il consolidamento di una teoria (la relatività generale) e l'inizio di una nuova era per la fisica. Infatti la rivelazione delle onde gravitazionali aprirebbe un nuovo canale osservativo dei fenomeni fisici risalenti forse all'epoca del Big Bang e dei fenomeni astrofisici che quotidianamente vengono osservati con altri mezzi d'indagine. Si potrebbero utilizzare le coincidenze con altri esperimenti di rivelazione di neutrini, raggi X, raggi γ , per trovare spiegazioni ad alcuni fenomeni astrofisici ancora irrisolti.

Queste prospettive hanno fatto nascere, negli ultimi anni, tra la comunità scientifica internazionale un interesse tale da far approvare la costruzione di diversi esperimenti che potrebbero permettere la rivelazione dei segnali gravitazionali.

In realtà una prima serie di esperimenti in questa direzione erano stati compiuti da Weber [2] intorno agli anni '60. Egli si proponeva di rivelare onde gravitazionali attraverso un "risuonatore" costituito da una barra di alluminio del peso di circa una tonnellata e mezzo. Il suo lavoro è stato il precursore di tutti gli esperimenti di barra risonante successivi che si basano sullo stesso principio di rivelazione.

L'esperimento VIRGO appartiene ad una classe differente di rivelatori: quella dei rivelatori interferometrici alla Michelson-Morley. Il progetto nato nel 1989 da una collaborazione italo-francese, è in fase di costruzione nella piana di Cascina (Pisa). Questo esperimento si prefigge la rivelazione di onde gravitazionali in una ampia banda di frequenze (10 – 1000 Hz). Per ottenere questa banda di sensibilità nell'esperimento verranno impiegati i superattenuatori per ridurre il rumore sismico a basse frequenze, utilizzate cavità Fabry-Perot ed una tecnica di ricircolo della

luce per migliorare la sensibilità ad alte frequenze.

Tra i segnali gravitazionali la cui rivelazione è più promettente vi sono i segnali prodotti da fenomeni di coalescenze di stelle binarie ed i segnali prodotti da pulsar. Tali segnali, pur essendo prodotti in eventi astrofisici, producono un'ampiezza spettrale confrontabile con la sensibilità dell'apparato. Per migliorare il rapporto segnale-rumore per i segnali periodici, per esempio, è necessario integrare il segnale per periodi lunghi (dell'ordine dell'anno). Questo significa accumulare una grande quantità di dati da analizzare. Nell'esperimento VIRGO è prevista una frequenza di campionamento del segnale di 20KHz e per esempio un anno di presa dati equivale a 2.5Terabyte di dati da analizzare. L'analisi di tali segnali quindi richiede l'utilizzo di tecniche adeguate e di potenze di calcolo elevate.

È necessario prepararsi all'analisi dei dati che l'esperimento comincerà a fornire nel 1999 con l'interferometro test (una versione dell'interferometro VIRGO con bracci lunghi 6 m) e nel 2001 quando entrerà in funzione l'interferometro con i bracci lunghi 3Km.

L'analisi dei dati richiede uno studio accurato del tipo di segnale che vogliamo rivelare e del fondo di rumore in cui tale segnale può essere presente. In questo lavoro di tesi sono stati affrontati i problemi relativi all'identificazione del rumore di VIRGO e quelli legati al filtraggio ottimale dei dati per la rivelazione dei segnali gravitazionali.

Nell'ipotesi di stazionarietà e gaussianità del rumore generato dall'apparato sperimentale, è possibile caratterizzare la distribuzione del rumore utilizzando la statistica di ordine due e quindi lo spettro prodotto dalle varie sorgenti di rumore. Le tecniche di filtraggio ottimale dei dati per la ricerca del segnale gravitazionale, nelle ipotesi di stazionarietà e gaussianità del rumore, presuppongono la conoscenza dello spettro di rumore del rivelatore. In particolare nelle tecniche di rivelazione dei segnali gravitazionali che abbiamo esaminato viene applicata una procedura di *whitening* del rumore, ossia una procedura che permette di analizzare il segnale come se fosse immerso in un rumore bianco, un rumore indipendente dalla frequenza.

In questo lavoro abbiamo analizzato le tecniche di stima spettrale mostrando come sia possibile modellizzare lo spettro di rumore teorico di VIRGO utilizzando tecniche parametriche.

Nella analisi spettrale classica si impiega il periodogramma per la stima dello spettro; questo approccio presenta diversi problemi, primo fra tutti la necessità di avere un campione di dati molto lungo per avere una buona risoluzione spettrale.

Le tecniche spettrali parametriche offrono una migliore precisione ed accuratezza rispetto al periodogramma. Inoltre i parametri del modello parametrico dello spettro possono essere utilizzati per la costruzione di un filtro di *whitening* che può essere implementato in linea direttamente sui dati in uscita dall'interferometro.

La struttura di alcuni modelli parametrici permette l'impiego di algoritmi adattivi per la stima dei coefficienti del modello direttamente dalla sequenza di dati senza doverne preliminarmente

stimare la funzione di autocorrelazione. In questo modo siamo in grado di *identificare* il rumore di VIRGO *on-line* utilizzando sequenze di dati corte.

Le tecniche adattive offrono i seguenti vantaggi:

- una migliore risoluzione spettrale;
- la possibilità di seguire le non stazionarietà, eventualmente presenti nel rumore, che hanno tempi caratteristici superiori ai tempi necessari per ottenere una stima spettrale con tali tecniche;
- la costruzione in linea del filtro di *whitening* opportuno per i dati in ingresso.

La tesi è organizzata nel modo seguente. Nel capitolo 1 descriviamo il segnale generato da alcune sorgenti astrofisiche e che VIRGO si prefigge di rivelare. Nel capitolo 2 scriviamo del modo sperimentale di rivelare le onde gravitazionali, descrivendo in particolare l'interferometro VIRGO. Nel capitolo 3 descriviamo le maggiori sorgenti di rumore che contribuiscono a definire la curva di sensibilità dell'interferometro VIRGO, ricavando dettagliatamente lo spettro generato dal rumore Newtoniano. Nel capitolo 4 analizziamo le tecniche di filtraggio ottimale dei dati per la rivelazione dei segnali transienti generati dalla coalescenza di stelle binarie ed i segnali periodici generati dalle pulsar. Mostriamo anche alcuni risultati ottenuti utilizzando metodi sub-ottimali quali l'analisi in wavelet per la ricerca dei segnali transienti. Nel capitolo 5 mostriamo i risultati ottenuti con le tecniche di modellizzazione parametrica di alcune simulazioni di spettri di rumore e dello spettro di rumore teorico di VIRGO. Nel capitolo 6 introduciamo i filtri a reticolo per la costruzione di un filtro di *whitening*, riportando i risultati della procedura di *whitening* applicata al rumore simulato di VIRGO. Infine nel capitolo 7 mostriamo come le tecniche adattive possono essere un ottimo ausilio per l'analisi dei dati di un esperimento così complesso. In particolare riportiamo gli incoraggianti risultati ottenuti con le tecniche adattive basate sui metodi dei minimi quadrati.

Capitolo 1

Segnali di onde gravitazionali

Una conseguenza della teoria della relatività generale è l'esistenza di perturbazioni alla metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ con caratteristiche ondulatorie: le *onde gravitazionali*.

Le equazioni di Einstein linearizzate per piccole perturbazioni $h_{\mu\nu}$ alla metrica $\eta_{\mu\nu}$, si scrivono nel vuoto:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (1.1)$$

essendo \square il D'Alembertiano nella metrica piatta di Minkowski e $\bar{h}_{\mu\nu}$ un tensore simmetrico a traccia nulla $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ (in appendice A riportiamo brevemente i passaggi per ricavare l'equazione 1.1).

Il campo gravitazionale possiede due modi di polarizzazione indipendenti che indichiamo con e_+ e e_\times . Dunque la forma generale di un'onda gravitazionale è data dalla sovrapposizione dei due stati di polarizzazione con ampiezze h_+ e h_\times :

$$h_{jk}^{TT} = h_+ e_{jk}^+ + h_\times e_{jk}^\times. \quad (1.2)$$

Abbiamo inoltre indicato il campo h_{jk} con il suffisso TT per evidenziare che siamo nella gauge trasversa a traccia nulla (vedi appendice A).

In questo capitolo vogliamo descrivere le caratteristiche generali del segnale gravitazionale ed in particolare il segnale di onde gravitazionali emesso da alcune sorgenti astrofisiche.

1.1 Caratteristiche del segnale gravitazionale

L'ordine più basso dello sviluppo in multipoli del segnale gravitazionale, indipendentemente dalla sorgente di emissione, è di quadrupolo. Questa è la conseguenza di un teorema del tutto generale [3]. Consideriamo infatti un campo di radiazione classico che trasforma secondo la rappresentazione di spin S ed effettuiamo lo sviluppo del campo in armoniche sferiche. Tutte le componenti con $l < S$ si annullano e nello sviluppo rimangono solo i termini di multipolo con

$l \geq S$. La grandezza $\bar{h}_{\mu\nu}$ è un tensore simmetrico a traccia nulla associato alla rappresentazione di spin $S = 2$, quindi l'ordine di multipolo più basso per un'onda di gravitazionale è quello di quadrupolo.

Per poter studiare il tipo di segnale emesso da una sorgente e la sua propagazione è necessario trattare separatamente i due problemi [4]. Questo si può fare dividendo lo spazio intorno alla sorgente in tre zone: una regione di generazione dell'onda a distanza dalla sorgente $r \lesssim r_1$, una zona di onda locale a distanza $r_1 \lesssim r \lesssim r_0$ ed una regione d'onda distante $r \gtrsim r_0$.

Sia λ la lunghezza d'onda dell'onda gravitazionale, R la dimensione della sorgente e $r_s = 2M$ il raggio di Schwarzschild della sorgente (vedi appendice A). Il raggio interno r_1 è abbastanza lontano da essere nella zona d'onda ($r_1 \gg \lambda/2\pi$), da essere nella regione dove il campo di gravità è debole ($r_1 \gg 2M$) e al di fuori delle dimensioni della sorgente $r_1 \gg R$.

Il raggio esterno r_0 è più grande del raggio interno tanto da lasciare molte lunghezze d'onda nella zona d'onda locale $r_0 - r_1 \gg \lambda/2\pi$, ma non tanto grande da essere influenzato dalla curvatura dello spazio-tempo dell'universo. Con queste scelte di r_0 e r_1 si possono trattare, nella zona d'onda locale ($r_1 \lesssim r \lesssim r_0$), le onde come se si propagassero nello spazio-tempo piatto.

Il problema della generazione della radiazione gravitazionale deve essere risolto all'interno di r_1 ; quindi, compreso come la curvatura dinamica si sviluppa nella zona d'onda locale $r_1 \lesssim r \lesssim r_0$, si può passare ad esaminare il problema della propagazione delle onde gravitazionali per $r \gtrsim r_0$.

Il tipo di formalismo che possiamo utilizzare per il calcolo della generazione delle onde gravitazionali dipende dalle caratteristiche dinamiche della sorgente e dal grado di approssimazione che possiamo effettuare:

- formalismo di quadrupolo: se la sorgente si muove lentamente $v \ll c$ possiamo considerare importante solo il primo ordine dell'espansione in multipoli del segnale gravitazionale;
- formalismo post-Minkowski o post-lineare: se la sorgente si muove velocemente $v \simeq c$ si può fare uno sviluppo nella deviazione ϵ dei coefficienti della metrica rispetto ai coefficienti della metrica di Minkowski, oltre il termine lineare;
- formalismo post-Newtoniano: per sorgenti che si muovono velocemente, ma non troppo $v \simeq 0.2c$, si effettua uno sviluppo sia nella deviazione ϵ dalla metrica di Minkowski che nella velocità v della sorgente;
- formalismo perturbativo: si studiano le piccole perturbazioni non radiali attorno alla struttura di equilibrio;
- simulazione numeriche: per stimare il segnale generato da sorgenti gravitazionali con

alte velocità interne, con grandi forze gravitazionali interne e con grandi deviazioni dalla metrica dello spazio-tempo piatto.

Il formalismo di quadrupolo, derivato da Einstein, per sorgenti lentamente in moto e con forze gravitazionali interne deboli, è una delle tecniche più importanti perché fornisce risultati accurati per molte sorgenti e perché è in grado di dare un'idea dell'ordine di grandezza dell'ampiezza del segnale gravitazionale per molte altre.

1.1.1 Il formalismo di quadrupolo

Affinché il formalismo di quadrupolo possa essere utilizzato per la descrizione delle onde gravitazionali emesse da una sorgente di dimensioni R è necessario che R sia molto minore della lunghezza d'onda ridotta $\lambda/2\pi$ delle onde emesse [5]. Con questo formalismo possiamo scrivere il campo di onda gravitazionale nella zona d'onda locale dove può essere trascurata la curvatura di background, nel modo seguente:

$$h_{jk}^{TT} = \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathcal{I}_{jk}(t-r)]^{TT}, \quad (1.3)$$

essendo r la distanza dal centro della sorgente, t il tempo proprio misurato da un osservatore a riposo rispetto alla sorgente e $t-r$ il tempo ritardato. $\mathcal{I}_{jk}(t-r)$ è il momento di quadrupolo di massa della sorgente valutato al tempo $t-r$.

Quando la sorgente ha debole gravità interna e piccoli stress interni, allora la parte simmetrica a traccia nulla del momento secondo della densità di massa ρ della sorgente, calcolato in un sistema di coordinate cartesiane centrate sulla sorgente è

$$\mathcal{I}_{jk}(t-r) = \int \rho(t) (x^j x^k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{jk}) d^3x. \quad (1.4)$$

Per avere una stima dell'ordine di grandezza dell'ampiezza delle onde gravitazionali emesse da una sorgente, si può approssimare la parte TT della derivata seconda del momento di quadrupolo di massa con quella parte dell'energia cinetica interna della sorgente associata con i moti non a simmetria sferica

$$h \simeq \frac{E^{ns}}{r}. \quad (1.5)$$

Il rate di energia emessa dalla sorgente è dato da

$$\frac{dE^{GW}}{dt} = \frac{1}{5} \sum_{j,k} \left\langle \left(\frac{d^3 \mathcal{I}_{jk}}{dt^3} \right)^2 \right\rangle. \quad (1.6)$$

1.2 Segnali gravitazionali

Possiamo definire i segnali gravitazionali secondo il loro comportamento temporale come

- transienti, se durano solo per breve tempo rispetto al tempo tipico di osservazione;
- periodici, se sono sovrapposizioni di segnali sinusoidali con frequenze più o meno costanti su tempi lunghi rispetto al tempo di osservazione;
- stocastici, se fluttuano stocasticamente e durano per un tempo lungo rispetto al tempo di osservazione.

Per ciascun tipo di tali segnali esiste una probabile sorgente astrofisica ad esso associabile. Per esempio i fenomeni di coalescenza di stelle binarie o di supernovae generano un segnale gravitazionale transiente e le pulsar un segnale periodico. Segnali stocastici possono essere associati ad un fondo di segnali scorrelati come quelli emessi da un insieme di pulsar, oppure al background primordiale di onde gravitazionali, analogo al fondo cosmico di microonde.

Nel lavoro di tesi ci siamo occupati dei primi due tipi di segnali.

1.2.1 Segnali monocromatici

Le sorgenti astrofisiche

L'esplosione di una supernova produce come risultato finale un oggetto stellare che, se possiede massa superiore al limite di Chandrasekhar ($1.4M_{\odot}$) diventa una stella di neutroni [6].

Modelli teorici di stelle a neutroni mostrano che il range permesso di masse è compreso tra 1.4 e 2.0 masse solari M_{\odot} ; una massa più piccola infatti non sarebbe in grado di esercitare la forza gravitazionale necessaria per tenere la stella nel suo stato condensato, mentre una massa più grande porterebbe ad un ulteriore collasso e alla formazione di un buco nero.

Consideriamo le caratteristiche tipiche di una stella di neutroni con massa $1.4 M_{\odot}$. Il diametro stimato della stella è 20–30 Km a secondo dell'equazione di stato all'interno; la densità centrale è compresa tra 10^{14} e $10^{15} \text{ gr cm}^{-3}$.

L'equazione di stato, che è dedotta da modelli di interazioni di particelle ad alta energia, è incerta a causa delle alte densità di materia al centro della stella. Equazioni di stato “stiffer”, considerate più probabili, sono quelle per cui il fluido di neutroni è meno compressibile; esse portano ad un raggio più grande, una più bassa densità centrale, una crosta solida più spessa ed un momento d'inerzia dell'ordine di $3 \times 10^{44} \text{ gr cm}^{-2}$.

La crosta è un reticolo cristallino rigido e forte, formato principalmente di nuclei di ferro. Il nucleo centrale della stella consiste invece di un fluido di neutroni, contenente una piccola porzione di elettroni e protoni.

La maggior parte delle stelle di neutroni sono osservabili grazie al fenomeno di emissione elettromagnetica ad esse associato che le identifica come *pulsar*.

Le pulsar sono stelle fortemente magnetizzate. L'intensità del loro campo di dipolo è consistente con il collasso di una stella normale con un campo magnetico dell'ordine di 100 gauss, essendo il flusso conservato nel materiale della stella collassante. Le intensità dei campi polari raggiungono valori di 10^{12} gauss in pulsar giovani, mentre per stelle vecchie hanno valori dell'ordine di 10^{10} gauss fino a 10^8 gauss per le pulsar più vecchie.

Al di fuori della stella il campo magnetico domina tutti i processi fisici, giocando un ruolo cruciale in numerose caratteristiche osservabili delle pulsar.

Il dipolo in genere non è allineato con l'asse di rotazione e quindi genera un'onda elettromagnetica nella banda di frequenze radio che viene osservata ad intervalli regolari a causa del moto di rotazione. Questo rende conto delle principali perdite di energie di rotazione e quindi dei rallentamenti osservati.

Popolazione delle pulsar note

Introduciamo nei seguenti paragrafi alcune delle caratteristiche principali della popolazione di pulsar [6].

Periodi La maggior parte delle pulsar hanno periodi di rotazione tra $1/4$ e 2 secondi; il periodo più lungo noto è di 4 secondi. Tutti i periodi aumentano nel tempo a causa della diminuzione di energia cinetica di rotazione; per la maggior parte delle pulsar la rotazione rallenta su scale di tempi tra 10^6 e 10^8 anni. La distribuzione dei periodi ed il rate di rallentamento suggeriscono che la maggior parte delle pulsar comincino la loro vita con periodi sotto i 100 millisecondi, seguano cammini evolutivi simili e smettano di irradiare dopo pochi milioni di anni. Questa interpretazione porta ad una nascita dell'ordine di 1 ogni 50 anni nella nostra galassia, consistente con un'origine da un evento di supernova.

Una popolazione separata di pulsar, la maggior parte con periodi molto brevi, ha un rate di rallentamento molto più basso, dovuto ad un valore di campo magnetico molto più piccolo. Queste pulsar a millisecondi sono pulsar "riciclate". Esse sono considerate stelle a neutroni che hanno già finito la loro attività, essendo il loro campo magnetico diminuito con il tempo, ma che hanno ripreso ad emettere per un processo di *spin-up* coinvolgente una stella compagna, dalla quale la pulsar prende materia. A differenza della maggior parte delle stelle, quasi tutte le pulsar non sono in sistemi binari. Solo il 2% sono note come sistemi binari; tra queste la maggior parte sono pulsar a millisecondi. Ci sono comunque forti indicazioni che molti membri della normale popolazione fossero originariamente in sistemi binari, distrutti dall'evento di supernova.

Popolazione Galattica La ricerca delle pulsar su tutta la sfera celeste è ovviamente limitata dalla sensibilità degli strumenti di rivelazione. Le pulsar deboli possono essere rivelate solo se sono vicine e quindi sono poveramente campionate, mentre la maggior parte sono tanto più difficili da osservare quanto più sono lontane dal centro galattico. Inoltre ci sono diverse limitazioni dovute agli effetti del mezzo interstellare sulla propagazione radio; questo è particolarmente importante vicino al piano galattico e verso il centro galattico.

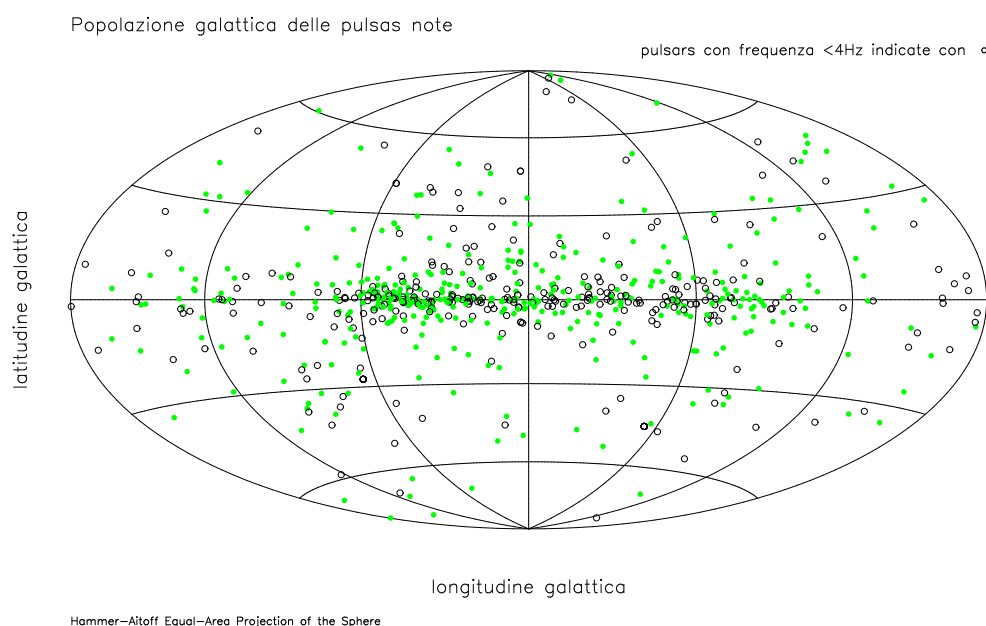


Figura 1.1: Distribuzione spaziale in coordinate galattiche delle pulsar note. Notare l'addensamento in corrispondenza del piano galattico, in particolare nella direzione del centro.

Con il campione di pulsar note disponibile, tuttavia, è stato possibile dedurre alcune informazioni statistiche. Vi è una popolazione complessiva di 10^5 - 10^6 pulsar attive nella galassia. Esse sono concentrate nel piano galattico entro uno spessore di circa 1 Kpc ed entro una distanza radiale di circa 10 Kpc dal centro. Misure del loro moto mostrano che esse hanno alte velocità, presumibilmente originate nella loro nascita violenta e si muovono principalmente allontanandosi dal piano galattico ad una velocità di 100 km sec^{-1} , cosicché la distribuzione è compatibile con un'origine entro i 100 parsec dal piano. Questo è consistente con il fatto che esse rappresentano il prodotto finale dell'evoluzione delle stelle masicce [7].

Le pulsar a millisecondi rappresentano una popolazione più piccola di vecchie pulsar. Il loro rate di rinascita nel processo di *spin-up* è molto più basso di quello di nascita delle nuove pulsar e sono osservabili come popolazione a causa della loro lunga vita.

Descrizione del segnale gravitazionale

Affinché una pulsar emetta gravitazionalmente deve possedere una asimmetria nella distribuzione di massa rispetto all'asse di rotazione (cfr. eq. 1.3).

I due modi h_+ e h_\times del campo di radiazione gravitazionale emesso da una pulsar, con asse di rotazione spostato di un angolo α rispetto all'asse di simmetria della sua distribuzione di massa, si possono scrivere, utilizzando l'approssimazione di quadrupolo, come [8] [9]

$$h_+ = h_0 \sin \alpha \left[\frac{1}{2} \cos \alpha \sin i \cos i \cos \Omega_p t - \sin \alpha \frac{1 + \cos^2 i}{2} \cos 2\Omega_p t \right], \quad (1.7)$$

$$h_\times = h_0 \sin \alpha \left[\frac{1}{2} \cos \alpha \sin i \sin \Omega_p t - \sin \alpha \cos i \sin 2\Omega_p t \right], \quad (1.8)$$

dove i è l'angolo di inclinazione della linea di vista rispetto all'asse di rotazione e Ω_p è la frequenza di rotazione della pulsar.

Possiamo parametrizzare l'asimmetria nella distribuzione di massa della stella con un parametro ϵ , l'ellitticità, definito come [8]

$$\epsilon = -\frac{3}{2} \frac{\mathcal{I}_{\hat{z}\hat{z}}}{I}, \quad (1.9)$$

dove abbiamo indicato con I il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione orientato lungo \hat{z} .

Una stima dell'ampiezza dell'onda gravitazionale in funzione del momento di inerzia, dell'ellitticità e del suo periodo di rotazione $P \equiv 2\pi/\Omega_p$ può essere ottenuta come

$$h_0 = \frac{16\pi^2 G}{c^4} \frac{I \epsilon}{P^2 r}, \quad (1.10)$$

essendo r la distanza tra la stella ed il rivelatore.

Se sostituiamo il valore numerico delle costanti si ha

$$h_0 = 4.21 \times 10^{-24} \left[\frac{\text{ms}}{P} \right]^2 \left[\frac{\text{Kpc}}{r} \right] \left[\frac{I}{10^{38} \text{Kg m}^2} \right] \left[\frac{\epsilon}{10^{-6}} \right]. \quad (1.11)$$

Dalla formula (1.11) risulta evidente che l'emissione di radiazione da pulsar è maggiore quanto più è elevato il valore della frequenza di rotazione, dalla quale h_0 ha una dipendenza quadratica, quanto più la pulsar è vicina e quanto più essa risulta asimmetrica (valore di ϵ grande).

Attualmente vi sono 706 pulsar note classificate nel Catalogo di J.H. Taylor, R.N. Manchester, A.G. Lyne, e F.Camilo, Maggio 1995 [10] [11] (d'ora in poi TMLC95), la cui distribuzione in coordinate galattiche è riportata in figura 1.1.

I valori della frequenza di rotazione per le pulsar note sono compresi in un intervallo tra $\sim 1\text{Hz}$ e $\sim 1000\text{Hz}$ e solo 53 di esse hanno un periodo minore di 25ms; le loro distanze eliocentriche sono, in media, di qualche Kpc. Delle 706 riportate nel catalogo TMLC95 solo 5 sono a distanze extragalattiche.

1.2.2 Segnali transienti

Le sorgenti astrofisiche

Tra tutte le sorgenti di onde gravitazionali, la coalescenza di stelle compatte binarie è quella più studiata e meglio compresa, almeno nell'approssimazione di masse puntiformi.

Due corpi massivi rotanti l'uno intorno all'altro costituiscono una sorgente di onde gravitazionali; tale emissione di energia provoca una diminuzione dell'energia potenziale del sistema che causa un avvicinamento a spirale delle due stelle fino alla "fusione" finale. Perché il segnale emesso sia abbastanza forte è necessario che le due stelle siano oggetti compatti, infatti solo in questo caso esse mantengono la loro struttura fino al fenomeno finale della coalescenza effettuando numerose rivoluzioni prima che ciò avvenga. Per questo motivo si considerano binarie formate da due stelle di neutroni (NS/NS), da due buchi neri (BH/BH) o da una stella di neutroni ed un buco nero (NS/BH). Una prova indiretta dell'emissione di onde gravitazionali da tali oggetti è data dalla binaria (NS/NS) PSR1913+16 [1]. La frequenza orbitale di tale oggetto è di circa $1/8(\text{ore})$. A causa dell'emissione di onde gravitazionali le due stelle stanno spiraleggiando e mostreranno il fenomeno della coalescenza in 10^8 anni.

Una stima del rate di fenomeni di coalescenze può essere data utilizzando la statistica sulle stelle binarie di stelle molto massicce. Queste, se riescono a rimanere in un sistema binario dopo gli eventi di supernovae, diventano sistemi binari di interesse per le coalescenze (NS/NS, BH/BH, NS/BH). Per poter osservare qualche evento di coalescenza l'anno, bisogna considerare distanze dell'ordine di 100 Mpc.

Descrizione del segnale gravitazionale

Per gli oggetti compatti considerati, mentre le deformazioni di marea sono trascurabili per molti cicli prima della coalescenza, gli effetti relativistici possono diventare molto importanti verso lo stadio finale del fenomeno.

Se consideriamo gli istanti iniziali del fenomeno di coalescenza, possiamo trascurare gli effetti relativistici e utilizzare la gravità di Newton. In questo caso possiamo ricavare il segnale atteso di onde gravitazionali con il formalismo di quadrupolo.

Il segnale atteso è semiperiodico, la frequenza del segnale infatti si mantiene quasi costante fino agli istanti finali in cui aumenta molto velocemente. Un analogo comportamento è seguito dall'ampiezza. Nel caso di un sistema di due stelle di massa totale $M = M_1 + M_2$ e massa ridotta $\mu = M_1 M_2 / M$, separate da una distanza r e con velocità angolare orbitale ω , l'equazione (1.6) dà la potenza dissipata sotto forma di onde gravitazionali:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32G}{5c^5} \mu^2 r^4 \omega^6 = -\frac{32G^{7/3}}{5c^5} (\mu M^{2/3})^2 \omega^{10/3}. \quad (1.12)$$

Utilizzando l'equazione (1.12) ed il fatto che l'energia totale di un sistema binario si scrive

$$E_{tot} = -\frac{GM\mu}{2r}, \quad (1.13)$$

si ottiene la relazione

$$\frac{1}{3}\mu(GM)^{2/3}\omega^{-1/3}\dot{\omega} = \frac{32G}{5c^5}\mu^2(GM)^{4/3}\omega^{10/3}. \quad (1.14)$$

Quindi si ha una relazione per il rate di cambiamento della frequenza

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{96G^{5/3}}{5c^5}\mu M^{2/3}\omega^{8/3}. \quad (1.15)$$

La frequenza dell'onda gravitazionale è doppia della frequenza di rotazione orbitale del sistema binario. Questo è vero se possiamo considerare la distribuzione di massa piana rispetto all'asse di rotazione. In questo caso una rotazione di π rispetto all'asse di rotazione equivale ad un inversione degli assi $x \rightarrow -x$ e $y \rightarrow -y$ e quindi il momento di quadrupolo è invariante rispetto a questa trasformazione. Nel caso, invece, in cui la distribuzione di massa non è piana, la proiezione lungo l'asse di rotazione rimane invariata rispetto ad una rotazione di π , mentre per le componenti lungo il piano vale il discorso precedente. Quindi in questo caso il momento di quadrupolo non rimane invariato rispetto alla rotazione di π e si ha emissione gravitazionale non solo alla frequenza doppia di quella di rotazione. Nel caso in cui consideriamo le due masse come puntiformi, possiamo considerare solo la frequenza doppia della frequenza di rotazione orbitale.

Indicando $\omega = \pi\nu$ si ha

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu} = \frac{96G^{5/3}}{5c^5}\mu M^{2/3}(\pi\nu)^{8/3}. \quad (1.16)$$

In questa approssimazione, dove si è supposto anche l'orbita di rotazione circolare, la frequenza dipende solo dalla quantità $K = \mu M^{2/3}$.

Integrando l'equazione (1.16), otteniamo

$$\nu(t) = 100 \left(\left(\frac{\nu_0}{100} \right)^{-8/3} - \alpha K t \right)^{-3/8} \text{ Hz}, \quad (1.17)$$

dove ν_0 è la frequenza al tempo $t = 0$ e la costante α è

$$\alpha = \frac{256(100\pi)^{8/3}G^{5/3}}{5c^2} \simeq 0.333. \quad (1.18)$$

Possiamo scrivere anche l'ampiezza dell'onda gravitazionale utilizzando l'equazione (1.3)

$$h = \frac{4G^{5/3}}{rc^4}K\omega^{2/3} \quad (1.19)$$

e in termini della frequenza d'onda gravitazionale

$$h = 2.56 \times 10^{-21} K \frac{1}{r} \nu^{2/3}, \quad (1.20)$$

dove M e μ sono espresse in unità di masse solari M_\odot ¹, r è in Mpc² e ν è la frequenza d'onda gravitazionale in unità di 100 Hz. Le due componenti dell'onda gravitazionale polarizzate linearmente sono allora:

$$h_+ = h \cos \phi(t) \quad (1.21)$$

$$h_\times = h \sin \phi(t), \quad (1.22)$$

dove

$$\phi(t) = 2\pi \int \nu(t) dt \quad (1.23)$$

è la fase del segnale. Con queste approssimazioni il segnale di una coalescenza binaria è dato da

$$h_+ = h \cos(\phi_0 - 2\pi\nu_0\chi(t)), \quad (1.24)$$

$$h_\times = h \sin(\phi_0 - 2\pi\nu_0\chi(t)), \quad (1.25)$$

dove per h e $\chi(t)$ valgono le relazioni seguenti

$$h = 2.56 \times 10^{-21} \frac{K}{r} \nu^{2/3}, \quad (1.26)$$

$$\chi(t) = \frac{8}{5} \tau \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{5/8}, \quad (1.27)$$

mentre

$$\tau = \frac{1}{\alpha K} \left(\frac{\nu_0}{100}\right)^{-8/3} \quad (1.28)$$

è l'intervallo di tempo in secondi tra il tempo in cui la frequenza del segnale è ν_0 e la fine della coalescenza.

Correzioni Post-Newtoniane

Durante gli ultimi istanti della coalescenza l'approssimazione Newtoniana non è più valida perché sia la perturbazione alla metrica di Minkowski $\epsilon = GM/Lc^2$ che la velocità della sorgente $v/c \sim (L/\lambda)^2$ hanno valori grandi.

È necessario, quindi, utilizzare il formalismo post-Newtoniano. In generale il segnale gravitazionale di un sistema binario coalescente nell'approssimazione post-Newtoniana può essere scritto nella forma

$$h(t) = A \nu^{2/3} \cos \phi(t), \quad (1.29)$$

¹ $M_\odot = 1.98892 \times 10^{30}$ Kg

² 1 Mpc = 3.08×10^{22} m

dove $\nu(t) = \phi'(t)$ è la frequenza locale e la fase (dipendente dal tempo) è la somma dei termini della forma:

$$\phi(t) = \phi_0(t) + \phi_1(t) + \phi_{1.5}(t) + \phi_2(t) + \dots \quad (1.30)$$

La corrispondenza tra la frequenza locale ed il tempo è data da

$$t = t_c + \tau_0 \left[1 - \left(\frac{\nu(t)}{F} \right)^{-8/3} \right] + \tau_1 \left[1 - \left(\frac{\nu(t)}{F} \right)^{-2} \right] + \tau_{1.5} \left[1 - \left(\frac{\nu(t)}{F} \right)^{-5/3} \right] + \dots, \quad (1.31)$$

mentre valori dei parametri τ_0 , τ_1 , $\tau_{1.5}$ e τ_2 sono dati da

$$\tau_0 = \frac{5}{256\eta M^{5/3}(\pi\nu_0)^{8/3}}, \quad (1.32)$$

$$\tau_1 = \frac{5}{192\eta M(\pi\nu_0)^2} \left(\frac{743}{336} + \frac{11}{4}\eta \right), \quad (1.33)$$

$$\tau_{1.5} = \frac{\pi}{8\eta M^{2/3}(\pi\nu_0)^{5/3}}, \quad (1.34)$$

$$\tau_2 = \frac{5}{128\eta M^{1/3}(\pi\nu_0)^{4/3}} \left(\frac{3058673}{1016064} + \frac{5429}{1008}\eta + \frac{617}{114}\eta^2 \right), \quad (1.35)$$

$$(1.36)$$

dove M indica la massa totale del sistema e $\eta = \mu/M$ e

$$F = \nu_0 \tau_0^{3/8}. \quad (1.37)$$

Se si considera, per esempio, il primo termine post-Newtoniano (PN1) l'equazione (1.16) diventa

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu} = \frac{3}{8} \alpha \nu^{8/3} K [1 - 0.03 K_p \nu^{2/3}]^{-1}, \quad (1.38)$$

dove ν è in unità di 100 Hz e le masse in unità di masse solari, con un parametro di massa

$$K_p = (1 + 1.24 \frac{\mu}{M}) M^{2/3}. \quad (1.39)$$

Non è più possibile quindi ottenere una forma analitica per la frequenza $\nu(t)$: occorre integrare numericamente l'equazione (1.38). La durata della coalescenza è data da

$$\Delta T = 7.97 K^{-1} \frac{3}{8} (\nu_0^{-8/3} - \nu_1^{-8/3}) - \frac{0.239}{2} K^{-1} K_p (\nu_0^{-2} - \nu_1^{-2}). \quad (1.40)$$

Anche l'ampiezza del segnale viene modificata dall'introduzione del termine PN1

$$h = 2.56 \times 10^{-21} \frac{K}{r} \nu^{2/3} [1 - 0.034 K_h \nu^{2/3}], \quad (1.41)$$

dove $K_h = (1 - 0.514 \mu/M) M^{2/3}$.

Se si riescono a misurare i parametri K e K_h possiamo avere informazioni sul valore delle singole masse della binaria.

Capitolo 2

Come rivelare le onde gravitazionali

L'idea che è alla base della rivelazione delle onde gravitazionali è quella di misurare la variazione della distanza x tra due particelle investite da un'onda gravitazionale (vedi appendice A), data dall'equazione della deviazione geodetica [3]

$$\delta x^j = \frac{1}{2} h_{jk}^{TT} x^k. \quad (2.1)$$

Per vedere l'effetto di un'onda gravitazionale sulla distanza di separazione tra particelle test a seconda del tipo di polarizzazione dell'onda stessa è utile osservare l'effetto simultaneo su un insieme di particelle test poste lungo un cerchio come in fig. 2.1.

Nelle prossime sezioni descriveremo in che modo è possibile misurare questa distanza usando apparati sperimentali differenti.

2.1 Esperimenti di rivelazione

Essenzialmente possiamo dividere i rivelatori di onde gravitazionali in due categorie

- rivelatori risonanti;
- rivelatori interferometrici.

Rivelatori risonanti I primi rivelatori di onde gravitazionali ad essere costruiti sono state le barre risonanti. Al passaggio di un'onda gravitazionale la barra, che ha una frequenza caratteristica di risonanza, comincia ad oscillare variando la lunghezza propria L di una quantità δL . Se la frequenza dell'onda gravitazionale è nella banda passante della barra risonante allora è possibile misurare la variazione di lunghezza $\delta L \simeq hL/2$ (vedi eq. (2.1)), essendo h l'ampiezza dell'onda gravitazionale.

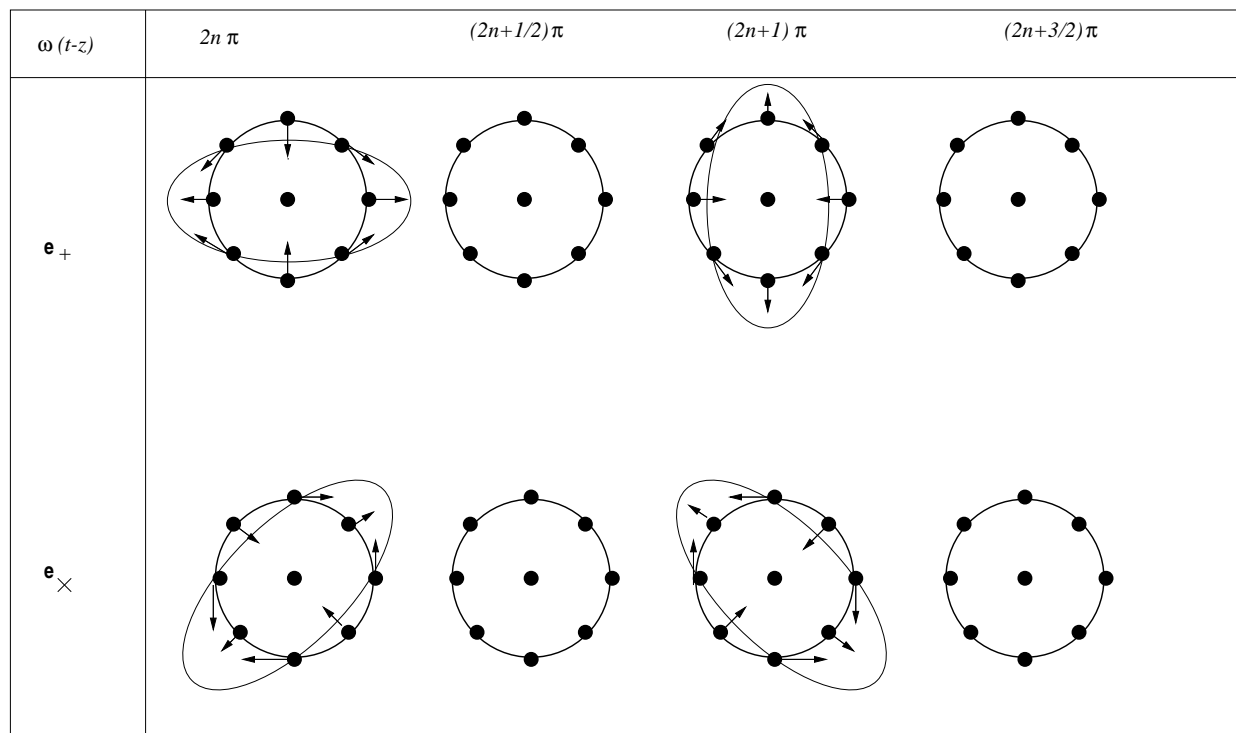


Figura 2.1: Effetto di un'onda gravitazionale su un insieme di particelle test.

Il precursore di questo tipo di esperimenti fu Weber [2], il quale intorno agli anni sessanta propose l'idea di rivelare onde gravitazionali utilizzando un cristallo piezoelettrico per misurare le oscillazioni di una barra risonante. Nel 1966 costruì una barra di alluminio lunga circa 1.5 metri e di massa 1.4 tonnellate, con una frequenza di risonanza di 1660 Hz.

Dal 1970 altri gruppi si sono impegnati nella costruzione di rivelatori di onde gravitazionali. Notevoli progressi tecnologici sono stati compiuti nella costruzione dei rivelatori [12] [13]. Molti sforzi sono stati fatti per migliorare il rapporto segnale-rumore degli esperimenti. Innanzitutto si cerca di far durare per un tempo più lungo possibile le oscillazioni della barra aumentando il fattore di qualità [14] $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, essendo ω_0 la frequenza di risonanza della barra e $\Delta\omega$ la larghezza della risonanza. Inoltre la barra viene raffreddata con elio liquido alla temperatura di 4K per ridurre il rumore termico [15] [16]; è stata migliorata la sospensione della barra per l'attenuazione delle vibrazioni esterne e sono stati utilizzati trasduttori risonanti ed amplificatori a basso rumore per il segnale.

Tra gli esperimenti già in funzione nel mondo ricordiamo

- AURIGA, NAUTILUS, EXPLORER, ALTAIR in Italia;

- ALLEGRO negli Stati Uniti;
- NIOBE in Australia.

Nei rivelatori risonanti la banda di frequenze che può essere amplificata è una banda relativamente stretta intorno alla frequenza di risonanza (che in genere è intorno al Khz), anche se si stanno compiendo sforzi per rendere tale banda dell'ordine di qualche decina di Hertz. Per questo motivo un rivelatore risonante non permette la rivelazione di gran parte delle pulsar che potrebbero emettere gravitazionalmente (per esempio nella regione a basse frequenze), né permette lo studio completo del fenomeno della coalescenza delle stelle binarie, fenomeno che copre un'ampia banda di frequenze.

Rivelatori interferometrici Un interferometro laser per la rivelazione di onde gravitazionali consiste essenzialmente di un interferometro di Michelson in cui quattro masse test, posizionate con in fig. 2.3, pendono da supporti isolati dalle vibrazioni e in cui un sistema ottico permette di misurare la separazione tra le masse modificata dal passaggio di un'onda gravitazionale.

Quando un'onda gravitazionale con una frequenza maggiore della frequenza di risonanza del pendolo ($\gtrsim 1$ Hz)¹, passa attraverso il rivelatore, induce una oscillazione della distanza relativa tra le masse test $\Delta L \equiv L_1 - L_2$ (vedi fig. 2.1). Questo cambiamento è misurato dall'interferometro laser in modo tale che l'uscita dell'interferometro sia direttamente proporzionale a $\Delta L(t)$.

Lo schema di un interferometro di Michelson è il seguente: un fascio di luce, inviato su uno specchio semitrasparente è diviso in due. I due fasci così ottenuti si propagano perpendicolarmente e sono riflessi dagli specchi posti alle estremità dell'interferometro. La loro ricombinazione avviene sullo specchio semiriflettente. La differenza di fase $\delta\phi$ tra i due fasci è indicativa della differenza di lunghezza dei bracci dell'interferometro. Se questo è sistemato opportunamente, l'interferenza è totalmente distruttiva e l'uscita è sulla frangia nera dell'interferenza. Tutte le modificazioni di lunghezza di uno dei due bracci rispetto all'altro causeranno la presenza di luce all'uscita dell'interferometro.

In generale l'uscita dell'interferometro è una combinazione lineare dei due campi di onde con polarizzazione e_+ e e_\times :

$$\frac{\Delta L(t)}{L} = F_+(t)h_+(t) + F_\times(t)h_\times(t) \equiv h(t). \quad (2.2)$$

I coefficienti F_+ e F_\times , dell'ordine dell'unità, tengono conto della modulazione in ampiezza dell'onda gravitazionale dovuta al moto dell'interferometro rispetto alla sorgente e dipendono in maniera quadrupolare dalla direzione della sorgente e dall'orientazione del rivelatore.

¹Per frequenze molto maggiori della frequenza di risonanza del pendolo, le masse sospese possono considerarsi libere e quindi si può applicare l'eq. (2.1)

Un rivelatore interferometrico offre i vantaggi di una migliore sensibilità e soprattutto l'accessibilità ad una ampia banda di frequenze $10 - 10000$ Hz. Per questo motivo negli ultimi anni, si stanno costruendo esperimenti per la rivelazione interferometrica delle onde gravitazionali in molte regioni nel mondo:

- LIGO: due rivelatori con bracci di 4000 metri, uno ad Hanford Reservation e l'altro a Livingston Parish, negli Stati Uniti;
- GEO ad Hannover: interferometro con bracci di 600 metri frutto di una collaborazione anglo-tedesca;
- TAMA interferometro di 300 metri a Tokyo in Giappone;
- VIRGO interferometro di 3000 metri in Italia.

Altri tipi di rivelatori Esperimenti diversi dalle barre risonanti e dai rivelatori interferometrici da terra sono in progettazione negli ultimi anni. Sul principio dei rivelatori risonanti sono stati progettati rivelatori sferici che offrono il vantaggio di essere sensibili a tutte le direzioni e polarizzazioni della radiazione gravitazionale, rendendo accessibile la conoscenza della posizione della sorgente gravitazionale [17]. Al momento della stesura di questa tesi sono in progettazione i seguenti esperimenti

- GRAVITON in Brasile;
- ELSA in Italia;
- TIGA negli Stati Uniti;
- GRAIL in Olanda.

Un commento a parte merita il progetto **LISA** [18], che si prefigge di rivelare le onde gravitazionali da sorgenti galattiche ed extragalattiche per mezzo di un interferometro posto in orbita eliostazionaria con bracci della lunghezza di 5 milioni di Kilometri. Questo esperimento potrebbe rivelare onde gravitazionali nella banda di frequenza $10^{-4} - 10^{-1}$ Hz.

2.2 L'interferometro VIRGO

Il progetto VIRGO è nato da una collaborazione italo-francese nel 1989. Il progetto prevede la costruzione, peraltro al momento già avviata, di un interferometro con bracci lunghi 3Km nel sito di Cascina in provincia di Pisa come mostrato in figura 2.2.

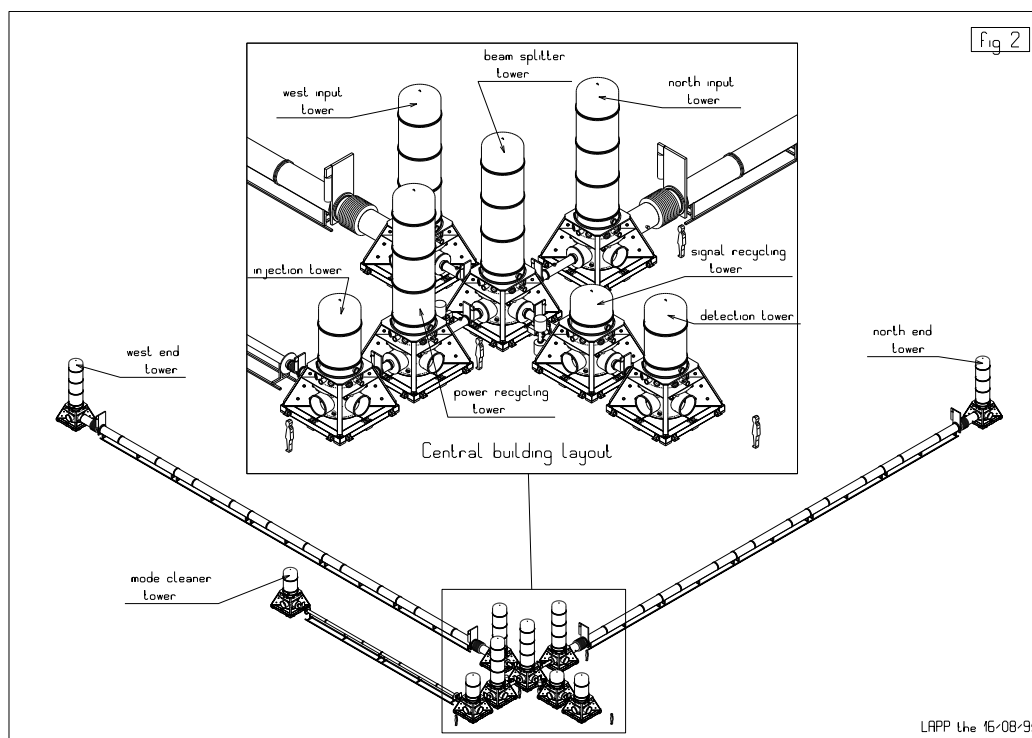


Figura 2.2: L'interferometro VIRGO

Per comprendere meglio il funzionamento di tale strumento, in figura 2.3 mostriamo lo schema ottico di VIRGO. L'interferometro utilizzerà un laser Nd:YAG mono modo e a frequenza singola ($\lambda = 1.064 \cdot 10^{-6} \text{ m}$) con una potenza di circa 20 Watts. Utilizzando la tecnica del ricircolo con un fattore di circa 50 si otterrà una potenza di 1000 Watts. Lo schema ottico prevede l'utilizzo di cavità Fabry-Perot di lunghezza 3 Km che renderanno il cammino ottico lungo 120 Km.

Il fascio di interferenza principale che porta il segnale gravitazionale è filtrato in uscita con una cavità *modo-cleaner*, cavità che filtra tutti i modi trasversi del laser lasciando passare solo il modo TEM_{00} sul quale viene tenuta la risonanza. Il segnale in uscita viene rivelato con un fotodiodo InGaAs.

L'intero interferometro verrà tenuto sotto vuoto (pressione minore di 10^{-5} Pa) principalmente per eliminare le variazioni di indice di rifrazione dell'aria. In figura 2.2 è riportato il sistema di vuoto dell'interferometro: nell'edificio centrale vi sono sette torri contenenti due masse test, il *beam-splitter*, lo specchio per il ricircolo del segnale, quello per il ricircolo della luce laser, il sistema di iniezione e quello di detezione. Alla fine dei due tubi a vuoto lunghi 3 Km troviamo le torri contenenti le altre due masse test.

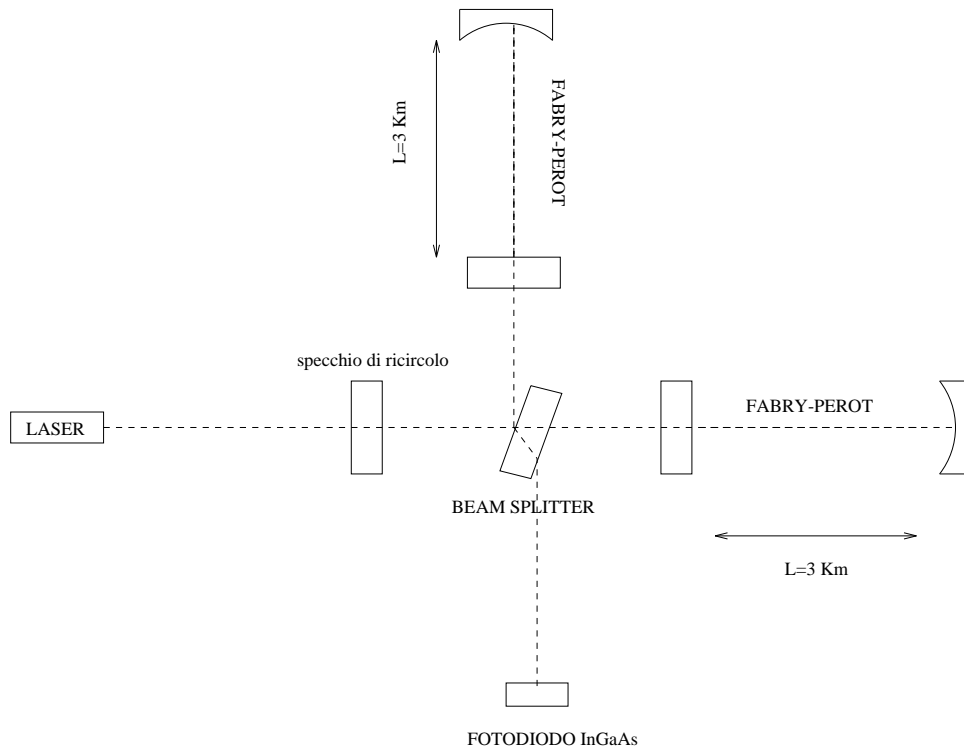


Figura 2.3: Schema ottico dell'interferometro VIRGO.

La differenza sostanziale tra l'esperimento VIRGO e gli altri interferometri è una maggiore sensibilità alle basse frequenze. Lo scopo principale che questo esperimento si prefigge è quello di raggiungere una sensibilità in h pari a $10^{-23}/\sqrt{\text{Hz}}$ al di sopra dei 100 Hz ed una sensibilità di $10^{-21}/\sqrt{\text{Hz}}$ intorno ai 10 Hz. Questo permetterebbe la rivelazione di gran parte delle pulsar note la cui distribuzione in frequenza è concentrata intorno ai 10 Hz.

2.2.1 Il superattenuatore

Uno degli ostacoli per la rivelazione delle onde gravitazionali a basse frequenze è costituito dal rumore sismico. Nell'esperimento VIRGO si è cercato di superare questa difficoltà utilizzando sistemi di isolamento sismico, i cosiddetti superattenuatori [19], sulle componenti rilevanti dell'interferometro.

Il super-attenuatore è un sistema passivo di attenuazione del rumore sismico, consistente in una catena di cinque stadi di attenuazione più una struttura iniziale, il cosiddetto *superfiltro*, posto all'inizio della catena. Il superfiltro è costituito da un filtro analogo ai filtri della catena sostenuto da un pendolo invertito, le cui tre gambe poggiano su un'anello alla fine della catena. In figura 2.4 riportiamo lo schema di una catena di sospensione per lo specchio test.

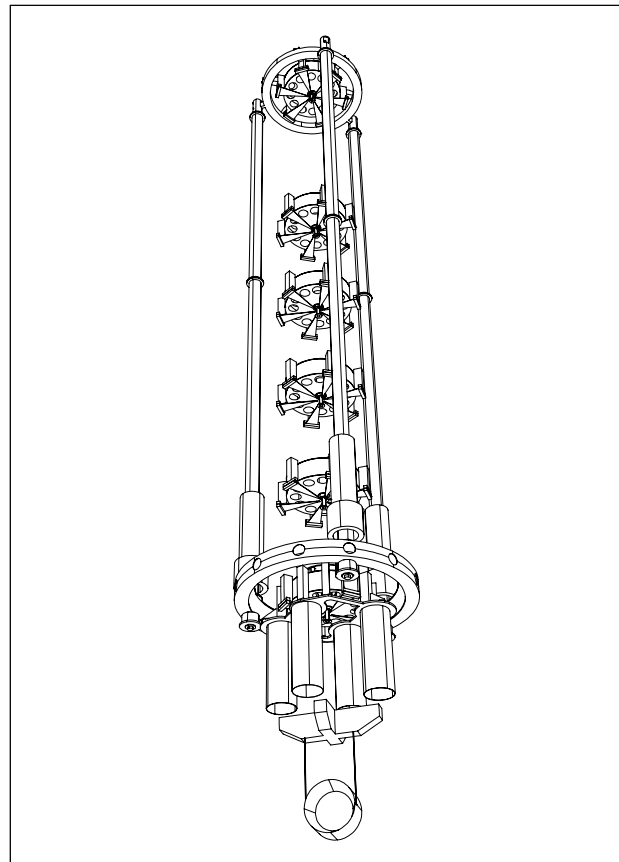


Figura 2.4: Catena di sospensione per le masse test nell'interferometro VIRGO.

Il principio di funzionamento del sistema si basa sul fatto che quando si è lontani superiormente dalla frequenza di risonanza di un pendolo la funzione di trasferimento del sistema è proporzionale a $(\nu_0/\nu)^2$, dove ν_0 è la frequenza di risonanza e ν è la frequenza della forzante sul sistema. Per una catena di N pendoli si ha un'attenuazione del rumore sismico che agisce sul punto di sospensione rispetto a quello che agisce sullo specchio proporzionale a $(\frac{\nu_0}{\nu})^{2N}$.

Le componenti verticali ed orizzontali del moto sismico nel sito di Cascina sono confrontabili, per cui è necessario un sistema di attenuazione anche del moto sismico verticale, per evitare che l'accoppiamento del moto verticale con il moto del pendolo causi uno spostamento orizzontale dello specchio. A tale scopo ciascun filtro della catena di pendoli è costituito da un sistema di lame metalliche e da anti-molle magnetiche il cui effetto combinato [20] permette di raggiungere la sensibilità desiderata.

L'accoppiamento tra gradi di libertà orizzontali e rotazionali viene invece ridotto con un momento di inerzia di ciascun filtro molto grande e riducendo i bracci del momento torcente su

ciascun filtro. Questo è ottenuto con connessioni al livello del filtro molto ravvicinate. Per raggiungere la sensibilità desiderata a 10 Hz il superattenuatore è stato progettato come una catena di 5 pendoli, ciascuno lungo un metro. In figura 2.5 riportiamo la funzione di trasferimento simulata del superattenuatore per il moto orizzontale e per il moto verticale [21].

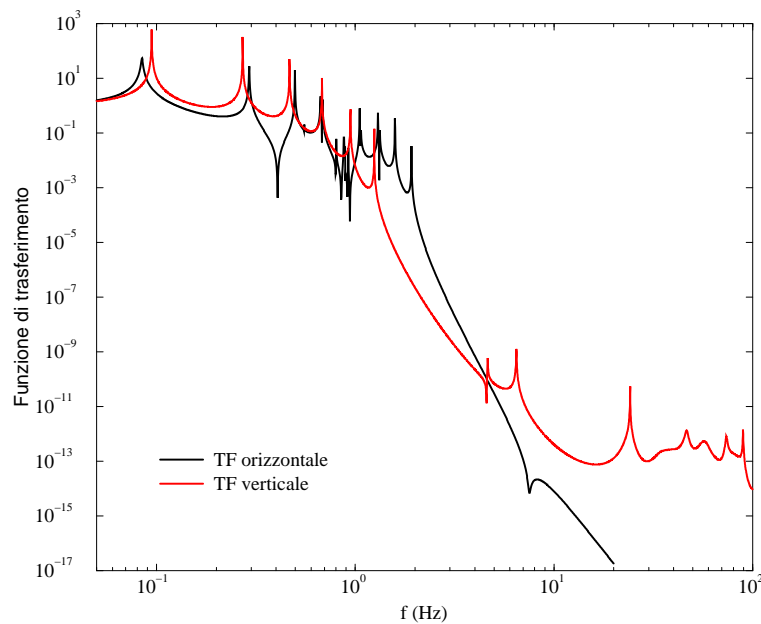


Figura 2.5: Funzione di trasferimento del superattenuatore dal punto di sospensione dello specchio.

La funzione di trasferimento del superattenuatore risponde alle richieste ad alte frequenze, ma al di sotto della frequenza di risonanza del sistema non è in grado di attenuare i movimenti dello specchio. Tuttavia le masse test devono essere tenute sempre sul punto di lavoro corretto perché la frangia di interferenza in uscita dall'interferometro, in assenza di segnale, risulti nera.

È possibile abbassare ulteriormente la frequenza di risonanza del sistema con l'impiego di un altro stadio della sospensione dato da un filtro (superfiltro o filtro zero) che è poggiato su tre gambe (vedi figura 2.4) che sostiene la catena dei 5 pendoli successivi. Le tre gambe lunghe 6 m sono poggiate su un anello per mezzo di giunti elastici, quindi un grande spostamento sul filtro zero corrisponde ad una piccola deformazione sui giunti. La forza elastica corrispondente sui giunti delle gambe è quindi molto piccola: questo abbassa la frequenza di risonanza del sistema.

Oltre ad un'attenuazione passiva è necessario utilizzare una procedura di *damping* attiva per

mantenere l'interferometro costantemente sul punto di lavoro. Questa viene realizzata con un sistema di controllo guidato da accelerometri sensibili alle accelerazioni del sistema in rotazione, in verticale ed in orizzontale, posti sul filtro zero del superattenuatore e sull'anello su cui poggiano le tre gambe.

Per il principio descritto prima lo stadio "tre gambe+filtro zero" costituisce un ottimo sistema per provocare grandi spostamenti del punto di sospensione in maniera non brusca, cioè movimenti con una frequenza bassa, utilizzando una piccola forza sui giunti elastici delle gambe. Inoltre l'anello su cui poggia tutto il sistema di attenuazione viene tenuto orizzontale con l'utilizzo di motori.

Le operazioni di controllo vengono effettuate anche direttamente sulla massa test attraverso la *marionetta* (vedi fig. 2.4), che è collegata all'ultimo stadio della catena di attenuazione con fili lunghi 1 m. È possibile, con la marionetta, posizionare nei 6 gradi di libertà la massa test con spostamenti dell'ordine della lunghezza d'onda del laser, permettendo di compensare il rumore sismico residuo alla catena del superattenuatore. Questi spostamenti vengono effettuati utilizzando un sistema di attuatori elettromagnetici montati sull'ultimo stadio del superattenuatore o su una *massa di riferimento* sospesa alla marionetta stessa.

Capitolo 3

Lo spettro di rumore di VIRGO

Nei primi capitoli abbiamo visto quanto il segnale gravitazionale possa essere debole anche in sorgenti astrofisiche relativamente vicine e massicce. Il problema essenziale della ricerca delle onde gravitazionali è proprio quello di cercare un segnale così debole nel fondo di rumore dell'apparato sperimentale. Questo rende necessaria la conoscenza approfondita delle sorgenti di rumore che contribuiscono alla curva di sensibilità dello strumento nella banda di frequenze in cui vogliamo cercare il segnale gravitazionale. In questo capitolo elencheremo le sorgenti di rumore dell'interferometro VIRGO e descriveremo il loro contributo allo spettro di rumore dell'apparato. Una sezione a parte sarà dedicata alla stima dello spettro del rumore newtoniano del quale abbiamo effettuato una stima dettagliata [22].

3.1 Sorgenti di rumore

Nello stimare il contributo delle sorgenti di rumore dell'interferometro supponiamo che il processo stocastico associato a ciascuna di esse sia gaussiano e stazionario (nel capitolo 5 ci soffermeremo più in dettaglio su questa affermazione). In questo modo possiamo caratterizzare completamente il processo con la statistica di ordine due, ovvero con la funzione di covarianza del processo. Avendo supposto anche la stazionarietà dello stesso, ovvero l'invarianza delle statistiche per traslazioni temporali del processo, possiamo convenientemente descriverlo nel dominio delle frequenze. In questo senso è sufficiente utilizzare la densità spettrale del rumore per definire il suo contributo alla sensibilità $h(\nu)$ dell'apparato.

Definendo lo spettro *two-sided* nel continuo come:

$$S_h(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \left| \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} h(t) e^{2\pi i \nu t} dt \right|^2 \right\rangle, \quad (3.1)$$

essendo $h(t)$ la serie temporale di rumore dell'apparato, indichiamo la sensibilità come

$$h(\nu) \equiv \sqrt{2S_h(\nu)}, \quad (3.2)$$

dove il fattore due è necessario se prendiamo solo lo spettro a frequenze positive (spettro *one-sided*).

3.1.1 Rumore sismico

Il movimento sismico del sito domina la sensibilità dell'apparato a basse frequenze. Nell'intervallo di frequenza 1 – 10 Hz questo è principalmente prodotto da fenomeni quali i venti, il traffico locale, il passaggio di un treno etc. [23]. I sistemi di cicloni atmosferici sull'oceano producono fluttuazioni a frequenze più basse, il cosiddetto fondo di micro-sisma. La sua ampiezza spettrale presenta un picco che corrisponde al periodo delle onde oceaniche (12 sec) ed uno più grande ad una frequenza doppia, mentre nell'intervallo 1 – 10 Hz è una funzione decrescente che può essere approssimata ad una legge di potenza.

Il rumore sismico misurato nel sito di Cascina può essere parametrizzato con il seguente spettro:

$$|x(\nu)|_{sismico} = \begin{cases} \frac{10^{-10}}{\nu^3} & \text{per } \nu < 0.05 \text{ Hz} \\ 10^{-6} & \text{per } 0.05 < \nu < 0.3 \text{ Hz} \\ \frac{10^{-7}}{\nu^2} & \text{per } \nu > 0.3 \text{ Hz} \end{cases} \quad (3.3)$$

Nel capitolo precedente abbiamo descritto la strategia sperimentale del progetto VIRGO per l'attenuazione di tale rumore attraverso l'utilizzo di una cascata di pendoli che sostengono la massa test.

La sensibilità in h , considerando la funzione di trasferimento del superattenuatore è data da

$$h(\nu) = \frac{2}{L} \mathcal{FT} \sigma_{h-v} |x(\nu)|_{sismico}, \quad (3.4)$$

essendo $\sigma_{h-v} = 10^{-2}$ la costante di accoppiamento tra il moto orizzontale e quello verticale del superattenuatore, \mathcal{FT} la funzione di trasferimento del superattenuatore e L la lunghezza dei bracci dell'interferometro.

3.1.2 Rumore *shot*

La differenza di cammino ottico percorso dalla luce lungo i due bracci dell'interferometro è misurata attraverso la variazione di potenza ottica all'uscita dell'interferometro.

La sensibilità con la quale possiamo rivelare l'onda gravitazionale dipende quindi dalla variazione minima in potenza che siamo in grado di misurare.

Misurare la potenza ottica equivale a “contare” il numero di fotoni che giungono all'uscita in un certo intervallo di tempo. La statistica che governa la distribuzione dei fotoni è una statistica di Poisson che nel limite di grande numero di fotoni può essere approssimata ad una distribuzione

gaussiana con deviazione standard $\sigma = \sqrt{\bar{N}}$, essendo \bar{N} il numero medio di fotoni. Per poter dare un senso alla fluttuazione del numero di fotoni, dobbiamo specificare il punto di lavoro dell'interferometro. Se prendiamo come punto di lavoro $P_{out} = P_{in}/2$, essendo P_{in} e P_{out} la potenza in entrata ed in uscita del laser, allora in uscita avremo un numero medio di fotoni pari a

$$\bar{N} = \frac{\lambda}{2\pi\hbar c} \frac{P_{in}}{2} \tau, \quad (3.5)$$

dove λ è la lunghezza d'onda del laser e τ l'intervallo di tempo in cui effettuiamo la misura. La fluttuazione nella differenza delle posizioni delle masse test sarà:

$$\sigma_{\delta L} = \frac{\sigma}{\bar{N}} / \frac{1}{P_{out}} \frac{dP_{out}}{dL} = \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{4\pi P_{in} \tau}}, \quad (3.6)$$

essendo $dP_{out}/dL = 2\pi/\lambda P_{in}$. La fluttuazione relativa in sensibilità è quindi data da

$$\sigma_h = \frac{\sigma_{\delta L}}{L_e} = \frac{1}{L_e} \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{4\pi P_{in} \tau}}, \quad (3.7)$$

dove L_e è la lunghezza ottica effettiva dei bracci dell'interferometro

Non c'è alcuna scala caratteristica di tale rumore, per cui l'ampiezza di densità spettrale ad esso associata può essere considerata piatta con ampiezza

$$h(\nu) = \frac{1}{L_e} \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{4\pi P_{in}}} \quad (3.8)$$

per uno spettro *two-sided*. A frequenze alte, ovvero a tempi di misura piccoli, tale approssimazione non è più valida essendo il numero di fotoni in uscita troppo piccolo.

Dalla formula 3.8 è evidente che per migliorare la sensibilità dell'apparato è conveniente avere una lunghezza ottica più lunga possibile. Questo nell'esperimento VIRGO è ottenuto mediante l'utilizzo di cavità Fabry-Perot [24], che rendono la lunghezza effettiva dei bracci pari a

$$L_e = \frac{2}{\pi} FL, \quad (3.9)$$

essendo F la finezza della cavità ed L la lunghezza reale dei bracci dell'interferometro.

L'utilizzo delle cavità Fabry-Perot non è però privo di conseguenze. Infatti una lunghezza ottica grande significa un tempo di permanenza della luce nella cavità (*tempo di storage*) lungo:

$$\tau_{storage} = \frac{2}{\pi} \frac{L}{c} F \text{ sec} . \quad (3.10)$$

Quando il tempo di storage nella cavità diventa comparabile o superiore al periodo dell'onda gravitazionale si perde il guadagno ottenuto "allungando" i bracci dell'interferometro perché la cavità media il segnale gravitazionale ricevuto su più periodi dell'onda gravitazionale. A

frequenze alte si ha dunque una diminuzione della sensibilità dell'interferometro ed il rumore *shot* può essere riscritto come

$$h(\nu) = \frac{\pi}{2FL} \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{4\pi P_{in}}} \sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_C}\right)^2}, \quad (3.11)$$

essendo $\nu_C \simeq 500$ Hz.

3.1.3 Pressione di radiazione

Aumentando la potenza di ingresso del laser potremmo diminuire il rumore *shot* (cfr. eq. (3.8)). Tuttavia la luce è in grado di esercitare una forza sullo specchio proporzionale alla potenza stessa $F_{rad} = P/c$. Questa forza fa fluttuare gli specchi producendo uno spostamento

$$x(\nu) = \frac{1}{m(2\pi\nu)^2} F(\nu), \quad (3.12)$$

dove abbiamo considerato la funzione di trasferimento del pendolo lontano dalla frequenza di risonanza. Tenendo conto del fatto che le fluttuazioni nei due bracci sono anticorrelate l'ampiezza di densità spettrale dovuta a questo rumore è

$$h_{rad}(\nu) = \frac{1}{m\nu^2 L} \sqrt{\frac{\hbar P_{in}}{2\pi^3 c \lambda}}. \quad (3.13)$$

3.1.4 Rumore quantistico

A basse frequenze il rumore di pressione di radiazione domina, mentre ad alte frequenze domina il rumore *shot*. Quando i due rumori si equivalgono, ad una frequenza fissata, vi è un minimo della densità spettrale totale, somma dei due rumori. Questo si verifica se scegliamo la potenza di ingresso

$$P(\nu) = \pi c \lambda m \nu^2. \quad (3.14)$$

In questo caso si dice che è stato raggiunto il limite quantistico:

$$h(\nu) = \sqrt{\frac{1}{\pi \nu L}} \sqrt{\frac{\hbar}{m}}. \quad (3.15)$$

Esso non rappresenta una vera e propria densità spettrale, ma una curva limite che può essere solo toccata ad una frequenza se scegliamo opportunamente la potenza del laser.

3.1.5 Rumore termico

Tutte le componenti dell'interferometro opereranno a temperatura ambiente, per cui saranno soggetti al rumore termico. Per stimare l'influenza del rumore termico sul moto degli specchi si sfrutta il teorema di Fluttuazione–Dissipazione.

Teorema di fluttuazione–dissipazione

Il rumore termico è legato attraverso il teorema di *Fluttuazione e Dissipazione* [25] alla parte dissipativa del sistema, supposto lineare ed in equilibrio termodinamico.

Supponiamo che il sistema sia sottoposto all'azione di una forza esterna $F_{ext}(\nu)$ alla quale esso risponde con velocità $v(\nu)$. Poiché il sistema è lineare possiamo scrivere l'equazione del moto nella forma

$$F_{ext}(\nu) = Z v(\nu) , \quad (3.16)$$

o equivalentemente

$$v(\nu) = Y F_{ext}(\nu) , \quad (3.17)$$

dove la funzione Z rappresenta l'impedenza del sistema e $Y = Z^{-1}$ l'ammettenza.

Il teorema di fluttuazione–dissipazione afferma che lo spettro di potenza $F_{termico}^2(\nu)$ della forza fluttuante agente sul sistema è dato da

$$F_{termico}^2(\nu) = 4 k_B T \Re(Z(\nu)) , \quad (3.18)$$

dove T è la temperatura del sistema, k_B la costante di Boltzmann e $\Re(Z(\nu))$ indica la parte reale ovvero la parte dissipativa dell'impedenza.

In una forma più utile, lo spettro di potenza del moto di fluttuazione del sistema è dato da

$$x_{termico}^2(\nu) = \frac{k_B T}{\pi^2 \nu^2} \Re(Y(\nu)) . \quad (3.19)$$

Il teorema di fluttuazione–dissipazione ci permette di avere una stima del rumore termico senza avere conoscenza del fenomeno microscopico che causa la dissipazione, ma unicamente specificando un modello macroscopico dell'impedenza in funzione della frequenza.

Con questo utile strumento sono stati stimati contributi di rumore termico [26] dovuti ai modi di pendolo x_p , ai modi normali delle masse test x_s ed ai modi di violino dei fili x_v .

Quindi il contributo alla curva di sensibilità di VIRGO del rumore termico totale è dato da

$$h_{termico}(\nu) = \frac{1}{L} \sqrt{x_p(\nu)^2 + x_v(\nu)^2 + x_s(\nu)^2} . \quad (3.20)$$

Modi di pendolo

Consideriamo due contributi principali: il moto flessurale di pendolo e la componente orizzontale del modo verticale dovuta alla curvatura della terra.

Per la parte flessurale

$$x(\nu)^2 = 4 m k_B T \frac{(2\pi\nu_{0f})^2}{2\pi\nu} \phi(\nu) |H(\nu)|^2 , \quad (3.21)$$

dove

$$H(\nu) = \frac{1}{(2\pi\nu_0)^2 m} \frac{1}{1 - (\frac{\nu}{\nu_0})^2 + i(\frac{\nu_{0f}}{\nu_0})^2 \phi(\nu)} \quad (3.22)$$

è la funzione di trasferimento del modo flessurale del pendolo. La funzione $\phi(\nu)$ viene detta angolo di perdita dei fili. Essa rappresenta la parte dissipativa associata al sistema “fio” di sospensione.

La frequenza di risonanza in assenza di gravità ν_{0f} per gli specchi vicini e quelli lontani è ovviamente diversa perché gli specchi hanno masse diverse. La frequenza di risonanza in presenza della forza di gravità diventa

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/L_f + (2\pi\nu_{0f})^2}, \quad (3.23)$$

essendo L_f la lunghezza dei fili di sospensione degli specchi.

Per la componente orizzontale del modo verticale abbiamo

$$x(\nu)^2 = 4 m k_B T \frac{(2\pi\nu_{0v})^2}{2\pi\nu} \phi(\nu) |H(\nu)|^2 \theta^2, \quad (3.24)$$

dove $\theta = 2.35 \cdot 10^{-4} rad$ è l'angolo di curvatura locale e

$$H(\nu) = \frac{1}{(2\pi\nu_{0v})^2 m} \frac{1}{1 - (\frac{\nu}{\nu_{0v}})^2 + i\phi(\nu)} \quad (3.25)$$

è la funzione di trasferimento del modo di pendolo verticale con frequenza di risonanza ν_{0v} .

Il contributo totale dei modi di pendolo, quindi, è dato da due volte (a causa dei due bracci dell'interferometro) la somma dei due contributi dovuti agli specchi vicini e lontani.

Modi degli specchi

Lo spostamento longitudinale dovuto ai modi normali delle masse test è calcolato come la somma di due contributi: il contributo dei due modi di tamburo dello specchio (modi di drum) sotto i 10^4 Hz e la coda a bassa frequenza di tutti i modi ad alte frequenze.

Per il primo abbiamo

$$x(\nu)^2 = 4 k_B T \frac{1}{m_{ms}} \frac{\phi_q}{(2\pi\nu)(2\pi\nu_{ms})^2 ((1 - (\frac{\nu}{\nu_{ms}})^2)^2 + \phi_q^2)}, \quad (3.26)$$

dove $\phi_q = 10^{-6}$ e ν_{ms} è la frequenza di risonanza dei modi drum, per il secondo

$$x(\nu)^2 = 4 k_B T \frac{1}{2\pi\nu} \phi_q m_w, \quad (3.27)$$

dove m_w è il parametro di massa equivalente $((m_{ms}\omega^2)^{-1})$ sommato su tutti i modi).

Modi di violino

Ciascun filo di sospensione degli specchi ha una propria frequenza di oscillazione che può essere eccitata dal rumore termico. Per stimare il contributo dei modi di violino si identifica ciascuna risonanza del filo con un oscillatore [27]. Le frequenze per i modi di violino sono

$$\nu_n = \frac{n}{2L_f} \sqrt{\frac{mg}{4\rho_f \pi r^2}} \left(1 + \frac{2}{L_f} \sqrt{\frac{4EI_2}{mg}} \right) \quad (3.28)$$

quindi il contributo totale si ottiene sommando su tutti i modi di violino e tenendo conto che ciascuno specchio è sorretto da 4 fili di sospensione:

$$x_v(\nu)^2 = 4 \cdot 4 m k_B T \frac{2\rho_f r^2 L_f}{\pi m^2} \sum_n \frac{\phi_{vn}}{(2\pi\nu)(2\pi\nu_n)^2 n^2 \left((1 - (\frac{\nu}{\nu_n})^2)^2 + \phi_{vn}^2 \right)}, \quad (3.29)$$

dove

$$\phi_{vn} = \frac{2\phi(\nu_n)}{L_f} \sqrt{\frac{4EI_2}{mg}} \left(1 + \frac{(n\phi(\nu_n))^2}{2L_f} \sqrt{\frac{4EI_2}{mg}} \right)^{-1} \quad (3.30)$$

è l'angolo di perdita associato ai modi di violino, ρ_f la densità di massa dei fili, r il loro raggio, E il modulo di Young e I_2 il momento di inerzia del filo.

3.2 Stima dello spettro del rumore newtoniano

In questa sezione descriveremo in dettaglio i risultati del lavoro svolto [22] per la stima dello spettro di rumore Newtoniano.

Le fluttuazioni della densità di massa prodotte dalle onde di microsisma producono un campo gravitazionale stocastico che si accoppia direttamente alle masse test dell'interferometro causando il rumore *newtoniano*.

Nell'intervallo di frequenze in cui il rumore newtoniano è rilevante, possiamo descrivere la base del superattenuatore come un corpo rigido con tre modi di vibrazione (due orizzontali ed uno verticale) e tre modi di rotazione (un modo di torsione attorno all'asse del superattenuatore e due modi di *tilt*).

L'effetto di una fluttuazione di densità di massa

$$\delta\rho(t) = \rho(t) - \langle \rho(t) \rangle \quad (3.31)$$

posta in \mathbf{R} rispetto ad una massa test è un suo spostamento \mathbf{x} che può essere scritto nello spazio delle frequenze come ^{1 2}

¹Se siamo lontani dalle frequenze di risonanza della catena di pendoli che sostiene la massa, la funzione di trasferimento del pendolo è $H(\omega) = -\omega^2$ e possiamo considerare la massa test libera.

²Per semplicità di notazione indichiamo le quantità nello spazio delle frequenze con lo stesso simbolo usato nello spazio dei tempi

$$-\omega^2 \mathbf{x}(\omega) = \frac{\mathbf{F}}{m} = G\delta\rho(\omega) \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV. \quad (3.32)$$

In quello che segue abbiamo supposto che le masse test nell'interferometro siano tre, considerando un'unica massa (che funziona da *beam-splitter*) sospesa all'angolo della L tra le due masse test poste alla fine dei bracci. È lecito fare questa approssimazione poiché le lunghezze d'onda del sisma di superficie sono tali per cui le due masse test vicine agli angoli della L si comportano in modo coerente rispetto all'onda.

Siamo interessati alla differenza dei cammini ottici δL nei due bracci dell'interferometro. Nell'approssimazione precedente si ha

$$\begin{aligned} -\omega^2 \delta L(\omega) = & G\delta\rho(\omega) \left\{ \frac{(L-y)}{(x^2 + (L-y)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{(-y)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right. \\ & \left. - \frac{(L-x)}{((L-x)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{(-x)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\} dV, \end{aligned} \quad (3.33)$$

essendo L la lunghezza dei bracci dell'interferometro. In questa espressione è contenuta la dipendenza dalla struttura geometrica dell'interferometro.

Dato un modello di dinamica del terreno possiamo integrare l'espressione precedente su tutte le fluttuazioni di massa ottenendo una relazione tra lo spettro di rumore sismico, che può essere misurato, e quello newtoniano.

3.2.1 Modello di Saulson (Modello I)

Una prima stima di questo rumore è quella ottenuta da Saulson [28]. Nel suo modello si considerano coerenti le fluttuazioni di densità di massa su una scala caratteristica $\lambda/2$ e completamente scorrelate per separazioni maggiori.

Integrando l'equazione (3.33) analiticamente su una regione cubica di volume $(\lambda/2)^3$ centrata sulle coordinate $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con $\delta M = \delta\rho(\lambda/2)^3$ fissata, si ha

$$-\omega^2 \delta L(\omega) = G\delta M(\omega) B(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (3.34)$$

dove abbiamo indicato con $B(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ il risultato dell'integrazione. Per avere l'effetto totale dovuto a tutte le regioni intorno all'interferometro, nell'ambito di questo modello, sommiamo in quadratura l'espressione precedente su tutti i cubi di dimensione $(\lambda/2)^3$

$$\omega^4 \langle |\delta L(\omega)|^2 \rangle = G^2 \langle |\delta M(\omega)|^2 \rangle \sum_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} B(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})^2 = G^2 \langle |\delta M(\omega)|^2 \rangle \frac{1}{\lambda^4} S\left(\frac{\lambda}{L}\right), \quad (3.35)$$

dove h è l'altezza rispetto al suolo a cui è sospesa la massa test. Abbiamo valutato questa somma numericamente con $L = 3000$ m ottenendo i risultati riportati in figura 3.1.

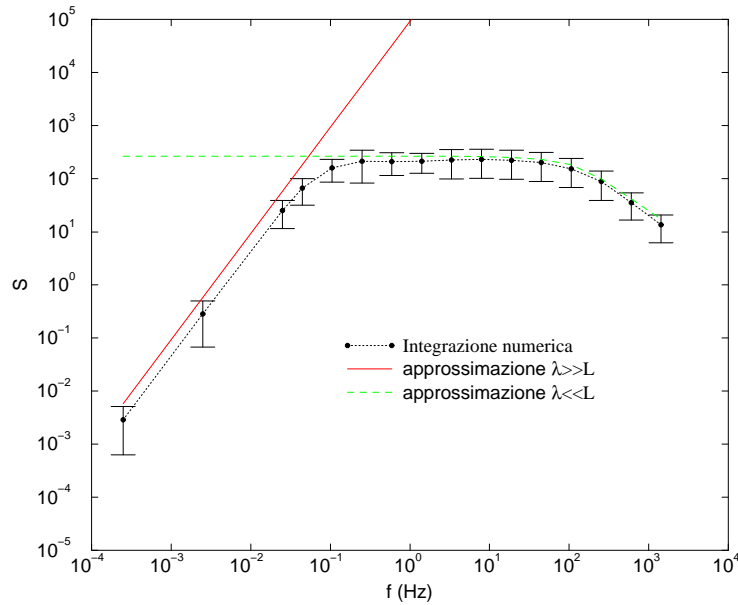


Figura 3.1: Risultati per il modello di Saulson. Funzione S valutata numericamente per $h = 1$ m con i due limiti asintotici. La relazione tra λ e la frequenza è ottenuta con la velocità di propagazione delle onde simiche $c_L = 1000/s$

Vi è un'ambiguità nel modello legata alla posizione della massa centrale rispetto al cubo più vicino, così i risultati sono presentati con la barra di errore che dà un'idea dell'indeterminazione. Come possiamo vedere non ci sono grosse differenze ed i risultati interpolano molto bene i comportamenti asintotici, stimati da Saulson, per $\lambda \ll L$

$$\frac{1}{\lambda^4} S\left(\frac{\lambda}{L}\right) = \sum_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} B(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})^2 \sim \frac{16}{3} \pi \left(\frac{2}{\lambda}\right)^4 \quad (3.36)$$

e per $\lambda \gg L$

$$\frac{1}{\lambda^4} S\left(\frac{\lambda}{L}\right) = \sum_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} B(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})^2 \sim \frac{192}{15} \pi \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 \frac{2}{\lambda^4}. \quad (3.37)$$

Possiamo collegare il rumore newtoniano allo spettro dello spostamento di un punto sul terreno usando la relazione tra la media quadrata della fluttuazione di massa e la media quadrata dello spostamento

$$\langle |\delta M(\omega)|^2 \rangle = V^2 \langle |\delta \rho(\omega)|^2 \rangle = \frac{\lambda^6}{16} \rho_0^2 \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \langle |\delta x(\omega)|^2 \rangle, \quad (3.38)$$

valida per un'onda di compressione. Abbiamo supposto che la dimensione della zona coerente sia metà della lunghezza d'onda di un'onda di compressione che è legata alla frequenza dalla relazione

$$\lambda = 2\pi \frac{c_L}{\omega} . \quad (3.39)$$

Mettendo insieme Eq. (3.38) e Eq. (3.35) otteniamo

$$\langle |\delta L(\omega)|^2 \rangle = \frac{G^2}{16\omega^4} \pi^2 \rho_0^2 S\left(\frac{\pi c_L}{L\omega}\right) \langle |\delta x(\omega)|^2 \rangle . \quad (3.40)$$

La tipica velocità dell'onda longitudinale c_L nel terreno di Cascina è di circa 1000 m/s, quindi ci aspettiamo che gli effetti di coerenza siano ad una frequenza minore 1/6 Hz. Dato che per valori della frequenza $> 1/6$ Hz la funzione $S(\lambda/L)$ è ben approssimata dal suo limite per piccoli valori di λ , il risultato finale per l'ampiezza è

$$\sqrt{\langle \left| \frac{\delta L(\nu)}{L} \right|^2 \rangle} \simeq 1.2 \times 10^{-11} |\delta x(\nu)| \frac{1}{\nu^2} . \quad (3.41)$$

3.2.2 Un modello più dettagliato (Modello II)

Un limite del modello di Saulson è che non tiene conto della conservazione della massa. Infatti si suppone che ogni zona possa fluttuare indipendentemente, ma questo non è realistico: una massa crescente in una zona deve essere collegata ad un flusso di massa proveniente dalle zone vicine. È possibile migliorare il modello utilizzando come variabili statistiche i flussi di massa ψ_i associati alle faccie di ogni cubo. L'indipendenza statistica delle variabili ψ_i è compatibile con la conservazione della massa e possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt} m(\bar{r}) = \sum_{i=x,y,z} \left(\psi_i(\bar{r} - \frac{\lambda}{2} n_i) - \psi_i(\bar{r} + \frac{\lambda}{2} n_i) \right) , \quad (3.42)$$

quindi l'equazione (3.34) diventa

$$-i\omega^3 \delta L(\omega) = GB(\bar{r}) \sum_{i=x,y,z} \left(\psi_i(\bar{r} - \frac{\lambda}{2} n_i, \omega) - \psi_i(\bar{r} + \frac{\lambda}{2} n_i, \omega) \right) . \quad (3.43)$$

Se sommiamo su tutte le zone e calcoliamo la media del quadrato del risultato otteniamo

$$\langle |\delta L(\omega)|^2 \rangle = \frac{G^2}{\omega^6} \langle |\psi(\omega)|^2 \rangle \sum_{\bar{r}, i} (B(\bar{r} + \lambda n_i) - B(\bar{r}))^2 . \quad (3.44)$$

Nel limite $\lambda \ll l$ possiamo approssimare la somma con un integrale per ottenere

$$\sum_{\bar{r}, i} (B(\bar{r} + \lambda n_i) - B(\bar{r}))^2 \sim \frac{8}{\lambda} \int \frac{1 + 3 \cos^2 \theta \sin^2 \phi}{r^6} dv = \frac{128}{3} \pi \left(\frac{2}{\lambda}\right)^4 . \quad (3.45)$$

La media del quadrato della variabile ψ può essere collegata in modo semplice alla media quadrata dello spostamento x utilizzando l'equazione (3.42)

$$\langle |\psi(\omega)|^2 \rangle = \omega^2 \frac{\pi^2}{6} \rho_0 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \langle |x(\omega)|^2 \rangle . \quad (3.46)$$

Otteniamo così il risultato per l'ampiezza

$$\left\langle \left| \frac{\delta L(\omega)}{L} \right|^2 \right\rangle = \frac{64}{9} \frac{\pi^3}{L^2} \frac{G^2 \rho_0^2}{\omega^4} \langle |\delta x(\omega)|^2 \rangle , \quad (3.47)$$

che è leggermente più grande di quello ottenuto nel modello di Saulson (di circa un fattore 4/3). Essenzialmente la condizione di conservazione della massa è equivalente ad un modello di Saulson in cui la correlazione tra le fluttuazioni in celle differenti sono introdotte come

$$\langle \delta M(r) \delta M(r + kn_i) \rangle = \langle \delta M_{\text{Saulson}}^2 \rangle \left(\delta_{k,0} - \frac{1}{6} \delta_{k,1} \right) . \quad (3.48)$$

3.2.3 Modello Elastico (Modello III)

Per ottenere una stima realistica della funzione di trasferimento che collega lo spettro di rumore sismico allo spettro di rumore newtoniano vogliamo stimare come le fluttuazioni della densità di massa superficiale sono legate al moto sismico superficiale e di volume del terreno. Consideriamo il terreno come un mezzo omogeneo limitato dal piano $z = 0$. Possiamo considerare il rumore sismico come sovrapposizione di onde elastiche, che sono soluzioni dell'equazione [29]

$$\partial_t^2 u_i(x, t) = c_T^2 \partial_k \partial_k u_i(x, t) + (c_L^2 - c_T^2) \partial_i \partial_k u_k(x, t) , \quad (3.49)$$

le quali rappresentano onde longitudinali con velocità c_L e onde trasversali con velocità c_T . Il campo $u_i(x, t)$ rappresenta lo spostamento di un punto dalla sua posizione originale x nella direzione i . In questo modello omogeneo le fluttuazioni di densità di massa sono generate da due meccanismi: variazioni di volume e oscillazioni di superficie.

- Un'onda longitudinale genera una variazione di volume proporzionale alla traccia del tensore degli sforzi ³ che in regime lineare provoca una fluttuazione di densità

$$\delta \rho = -\rho_0 (1 + u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) . \quad (3.50)$$

- Le oscillazioni di superficie generano una fluttuazione di massa che in approssimazione lineare può essere scritta

$$dm = \rho_0 u_z(x, y, 0) dx dy . \quad (3.51)$$

³Il tensore di deformazione u_{ik} è definito come $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_k} + \frac{\partial u_k}{\partial u_i} \right)$

Dobbiamo stimare, in questi due casi, il contributo al rumore newtoniano di tali fluttuazioni di massa. Nel caso delle onde di volume, se supponiamo la massa test posta nella posizione $(0, 0, h)$, possiamo scrivere l'accelerazione causata da tali fluttuazioni come

$$\begin{pmatrix} \delta \vec{a} \\ \delta a_z \end{pmatrix} = G\rho_0 \int_{z < 0} (\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z) \frac{1}{(x^2 + y^2 + (h - z)^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ z - h \end{pmatrix} dV, \quad (3.52)$$

dove l'integrazione è estesa al semispazio $z < 0$.

Nel caso delle onde di superficie, invece

$$(\delta \vec{a}, \delta a_z) = G\rho_0 \iint \frac{(\vec{x}, -h)}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} u_z(x, y, 0) dx dy, \quad (3.53)$$

dove l'integrazione è estesa a tutto il piano $z = 0$.

In appendice B abbiamo riportato la classificazione delle onde di background sismico ottenendo una completa classificazione dei modi elastici che, nello spazio (\vec{k}, ω, z) possono essere riassunti in

$$\begin{pmatrix} \vec{u}(\vec{k}, \omega, z) \\ u_z(\vec{k}, \omega, z) \end{pmatrix} = \sum_{\mu} \left\{ A_{\mu}(\vec{k}, \omega) \begin{pmatrix} \vec{k} \cos k_L z - k_T f_2 \hat{n}_k \cos k_T z \\ i k_L \sin k_L z + i k f_2 \sin k_T z \end{pmatrix} \right. \\ \left. + B_{\mu}(\vec{k}, \omega) \begin{pmatrix} i \vec{k} \sin k_L z - i k_T f_1 \hat{n}_k \sin k_T z \\ k_L \cos k_L z + k f_1 \cos k_T z \end{pmatrix} + C_{\mu}(\vec{k}, \omega) \begin{pmatrix} \epsilon \vec{k} \cos k_T z \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.54)$$

dove A_{μ} , B_{μ} e C_{μ} sono combinazioni lineari delle ampiezze associate a ciascun modo. L'indice μ varia sui modi possibili (vedi l'appendice B), k_T e k_L sono legati alla frequenza dell'onda dalle relazioni di dispersione

$$k^2 + k_T^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2}, \quad (3.55)$$

$$k^2 + k_L^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2}, \quad (3.56)$$

essendo c_L e c_T la velocità dell'onda nel mezzo longitudinale e trasversale rispettivamente. I parametri f_1 e f_2 sono combinazioni di k , k_T e k_L (vedi App. B).

Con questa parametrizzazione possiamo riscrivere il contributo di volume e quello di superficie rispettivamente come

$$\begin{pmatrix} \delta \vec{a} \\ \delta a_z \end{pmatrix} = 2\pi G\rho_0 \begin{pmatrix} \hat{n}_k \\ i \end{pmatrix} (A_{\mu} k - i B_{\mu} k_L) e^{-hk} \quad (3.57)$$

e

$$\begin{pmatrix} \delta \vec{a} \\ \delta a_z \end{pmatrix} = 2\pi i G\rho_0 \begin{pmatrix} \hat{n}_k \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{k_T^2 + k^2}{k_T^2 - k^2} \right) k_L B_{\mu} e^{-hk}. \quad (3.58)$$

Possiamo quindi scrivere il contributo totale al rumore newtoniano generato da tutti i modi come

$$\begin{pmatrix} \delta \vec{a} \\ \delta a_z \end{pmatrix}(\vec{k}, h, \omega) = 2\pi G \rho_0 \begin{pmatrix} \hat{n}_k \\ i \end{pmatrix} \times \left\{ k \sum_{\mu} A_{\mu}(\vec{k}, \omega) + 2i \frac{k^2}{k_T^2 - k^2} k_L \sum_{\mu} B_{\mu}(\vec{k}, \omega) \right\} e^{-hk}. \quad (3.59)$$

3.2.4 Funzione di trasferimento sismico-newtoniano

Per capire come il rumore sismico sia trasferito in rumore newtoniano, dobbiamo scrivere l'influenza dei modi elastici del sottosuolo sulle infrastrutture dell'interferometro. A tale scopo schematizziamo la base della torre come un corpo rigido basato sul terreno. Tale basamento è accoppiato alle deformazioni indotte dal moto sismico.

Consideriamo le deformazioni che possono essere descritte come moti rigidi del basamento:

- due traslazioni orizzontali: $\delta \vec{x} \rightarrow \vec{u}(\vec{x})$;
- moto verticale: $\delta z \rightarrow u_z(\vec{x})$;
- moto di torsione: $\delta \theta_z = \frac{1}{2}(\partial_x u_y - \partial_y u_x)$;
- moto di tilt: $\delta \theta_{\vec{x}} = \partial_{x,y} u_z$.

I contributi relativi dei modi elastici a questi movimenti possono essere scritti come

$$\delta \vec{x}(\vec{k}, z=0, \omega) = \sum_{\mu} A_{\mu}(\vec{k}, \omega) \frac{\omega^2}{2c_T^2 k^2} \vec{k} + \sum_{\mu} C_{\mu}(\vec{k}, \omega) \epsilon \vec{k}, \quad (3.60)$$

$$\delta z(\vec{k}, z=0, \omega) = \sum_{\mu} B_{\mu}(\vec{k}, \omega) \frac{\omega^2}{c_T^2} \frac{k_L}{k_T^2 - k^2}, \quad (3.61)$$

$$\delta \theta_{\vec{x}}(\vec{k}, z=0, \omega) = i \sum_{\mu} B_{\mu}(\vec{k}, \omega) \frac{\omega^2}{c_T^2} \frac{k_L}{k_T^2 - k^2} \vec{k}, \quad (3.62)$$

$$\delta \theta_z(\vec{k}, z=0, \omega) = \sum_{\mu} -\frac{i}{2} C_{\mu}(\vec{k}, \omega) k^2. \quad (3.63)$$

Queste relazioni possono essere risolte rispetto alle ampiezze A , B e C separando $\delta \vec{x}$ e $\delta \theta_{\vec{x}}$ in una parte longitudinale ed in una trasversale. Il risultato finale è

$$\sum_{\mu} A_{\mu} = 2 \frac{c_T^2}{\omega^2} \vec{k} \cdot \delta \vec{x},$$

$$\begin{aligned}\sum_{\mu} B_{\mu} &= \frac{c_T^2}{\omega^2} \left(\frac{k_T^2 - k^2}{k_L} \right) \delta z, \\ \sum_{\mu} C_{\mu} &= \frac{2i}{k^2} \delta \theta_z.\end{aligned}\quad (3.64)$$

Quindi l'ampiezza A è collegata al rumore sismico orizzontale, l'ampiezza B al rumore sismico verticale e l'ampiezza C al rumore sismico torsionale. A questo punto possiamo collegare le accelerazioni del rumore newtoniano al rumore sismico misurabile in superficie, sosituendo le relazioni 3.64 nell'eq. 3.59

$$\begin{pmatrix} \delta \vec{a} \\ \delta a_z \end{pmatrix}(\vec{k}, z = h, \omega) = 4\pi G \rho_0 \frac{c_T^2}{\omega^2} \begin{pmatrix} \hat{n}_k \\ i \end{pmatrix} \left\{ k \vec{k} \cdot \delta \vec{x} + i k^2 \delta z \right\} e^{-hk}. \quad (3.65)$$

3.2.5 Spettro di rumore newtoniano

Il nostro obiettivo è quello di ottenere una relazione tra lo spettro di rumore newtoniano e quello sismico il quale è facilmente misurabile. A tal fine consideriamo rilevanti solo i modi di Rayleigh, ossia i modi di superficie che in appendice B abbiamo indicato con $\mu = 0$ e per i quali $A_0 = B_0$. Questa supposizione è fisicamente motivata perché i modi di superficie sono fortemente localizzati vicino alla superficie, cosicché il loro effetto è massimizzato; inoltre essi rappresentano il meccanismo più efficace per il trasporto di energia dalle sorgenti di microsisma lontane. In questa ipotesi

$$\begin{pmatrix} \delta \vec{a} \\ \delta a_z \end{pmatrix} = G \rho_0 \begin{pmatrix} \hat{n}_k \\ i \end{pmatrix} A_0(\hat{n}_k, \omega) \frac{\omega}{c_T} W(\xi) \exp\left(-h \frac{\omega}{c_T \sqrt{x}}\right), \quad (3.66)$$

dove

$$W(\xi) = 2\pi \left\{ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x-2} \sqrt{\frac{1}{x} - \xi} \right\} \quad (3.67)$$

è una costante che dipende solo dal rapporto della velocità longitudinale e quella trasversale.

L'ipotesi chiave nel nostro modello è che le ampiezze casuali collegate ai diversi modi elastici sono statisticamente scorrelate; inoltre se supponiamo che la funzione di autocorrelazione sia isotropa la doppia somma sui modi si riduce ad un integrale che può essere valutato in termini delle funzioni di Bessel.

Possiamo quindi stimare le correlazioni tra le accelerazioni newtoniane in due punti della superficie alle coordinate \vec{x}_1 e \vec{x}_2 :

$$\langle \delta a_i(\vec{x}_1) \delta a_j(\vec{x}_2) \rangle = \frac{1}{2} G^2 \rho_0^2 \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 W^2 < |A_0(\omega)|^2 > G_{ij}^T(\vec{x}_1, \vec{x}_2) e^{(-2h \frac{\omega}{c_T \sqrt{x}})}, \quad (3.68)$$

$$\langle \delta a_i(\vec{x}_1) \delta a_z(\vec{x}_2) \rangle = \frac{1}{2} G^2 \rho_0^2 \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 W^2 < |A_0(\omega)|^2 > G_i^V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) e^{\left(-2h \frac{\omega}{c_T \sqrt{x}}\right)}, \quad (3.69)$$

$$\langle \delta a_z(\vec{x}_1) \delta a_z(\vec{x}_2) \rangle = \frac{1}{2} G^2 \rho_0^2 \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 W^2 < |A_0(\omega)|^2 > G^S(\vec{x}_1, \vec{x}_2) e^{\left(-2h \frac{\omega}{c_T \sqrt{x}}\right)}. \quad (3.70)$$

Le funzioni $G(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ sono il risultato della somma sui modi definita in appendice B. Possiamo notare che l'effetto è smorzato esponenzialmente con l'altezza del punto di sospensione, con una lunghezza caratteristica che è inversamente proporzionale alla frequenza.

A questo punto possiamo scrivere lo spettro generato dalle forze newtoniane come

$$\langle |\delta L(\omega)|^2 \rangle = \frac{1}{|H(\omega)|^2} < |\delta a_x(0) + \delta a_y(2) - \delta a_x(1) - \delta a_y(0)|^2 >, \quad (3.71)$$

che può essere scritto utilizzando le funzioni di correlazioni a due punti come

$$\langle |\delta L(\omega)|^2 \rangle = 2\pi \frac{G^2 \rho_0^2}{|H(\omega)|^2} \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 |W|^2 < |A_0(\omega)|^2 > \exp\left(-\frac{2h\omega}{c_T \sqrt{x}}\right) \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{c_T \sqrt{x}}\right), \quad (3.72)$$

con

$$\mathcal{G}(t) = 1 - J_0(t) - J_2(t) - \frac{1}{2} J_2(t\sqrt{2}). \quad (3.73)$$

Le funzioni di correlazione per il rumore sismico possono essere valutate nello stesso modo. Possiamo riscrivere le relazioni (3.60) come

$$\delta \vec{x} = \frac{\omega \sqrt{x}}{2c_T} A_0(\omega, \hat{k}) \hat{k} = \frac{\omega}{c_T} u_X A_0(\omega, \hat{k}) \hat{k}, \quad (3.74)$$

$$\delta z = i \frac{\omega}{c_T} \frac{1-x}{2-x} \sqrt{\frac{x}{1-x\xi}} A_0(\omega, \hat{k}) = \frac{\omega}{c_T} u_Z A_0(\omega, \hat{k}), \quad (3.75)$$

$$\delta \theta_{\vec{x}} = -\frac{\omega^2}{c_T^2} \frac{1-x}{2-x} \sqrt{\frac{1}{1-x\xi}} A_0(\omega, \hat{k}) \hat{k} = \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 u_\theta A_0(\omega, \hat{k}) \hat{k}, \quad (3.76)$$

$$\delta \theta_z = 0. \quad (3.77)$$

Le quantità u_X, u_Z, u_θ definite da queste relazioni sono costanti che dipendono solamente dalla velocità del suono longitudinale e trasversale.

Assumiamo l'indipendenza dei modi e l'isotropia, come nel caso delle accelerazioni newtoniane, ottenendo le autocorrelazioni

$$< \delta x_i(x_1) \delta x_j(x_2) > = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 |u_X|^2 < |A_0(\omega)|^2 > G_{ij}^T(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \quad (3.78)$$

$$< \delta z(x_1) \delta z(x_2) > = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 |u_Z|^2 < |A_0(\omega)|^2 > G^S(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \quad (3.79)$$

$$< \delta \theta_i(x_1) \delta \theta_j(x_2) > = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^4 |u_\theta|^2 < |A_0(\omega)|^2 > G_{ij}^T(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad (3.80)$$

e le correlazioni miste

$$\langle \delta x_i(x_1) \delta z(x_2) \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 \text{Re}(u_X^* u_Z) \langle |A_0(\omega)|^2 \rangle G_i^V(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \quad (3.81)$$

$$\langle \delta x_i(x_1) \delta \theta_j(x_2) \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^3 \text{Re}(u_X^* u_\theta) \langle |A_0(\omega)|^2 \rangle G_{ij}^T(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \quad (3.82)$$

$$\langle \delta \theta_i(x_1) \delta z(x_2) \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^3 \text{Re}(u_Z^* u_\theta) \langle |A_0(\omega)|^2 \rangle G_i^V(\vec{x}_1, \vec{x}_2). \quad (3.83)$$

La quantità $\langle |A_0(\omega)|^2 \rangle$, che fissa la scala per i diversi rumori nel nostro modello, può essere scritta in termini di una quantità misurabile, quale per esempio il rumore sismico puntuale trasverso

$$\langle |A_0(\omega)|^2 \rangle = 4 \left(\frac{c_T}{\omega} \right)^2 \frac{1}{|u_X|^2} \langle \delta x_i(\omega)^2 \rangle. \quad (3.84)$$

In questo modo utilizzando l'equazione (3.72) otteniamo la relazione che collega lo spettro di rumore newtoniano allo spettro di rumore sismico

$$\langle |\delta L(\omega)|^2 \rangle = \frac{8\pi G^2 \rho_0^2 |W|^2}{|H(\omega)|^2 |u_X|^2} \exp\left(-\frac{2h\omega}{c_T \sqrt{x}}\right) \mathcal{G} \left(\frac{\omega L}{c_T \sqrt{x}} \right) \langle \delta x_i(\omega)^2 \rangle. \quad (3.85)$$

Il termine esponenziale taglia il rumore newtoniano ad alte frequenze e diventa rilevante quando

$$\omega > \omega_{\text{cut-off}} = \frac{c_T}{h} \sqrt{x\xi}. \quad (3.86)$$

Il fattore \mathcal{G} è collegato alla geometria dell'apparato e descrive gli effetti di coerenza. Il rapporto tra $|W|^2$ e $|u_X|^2$ dipende dalle velocità del suono trasversale e longitudinale (vedi tabella 3.1), ed è incluso in un intervallo tra ~ 130 (basso modulo di *shear*) e ~ 26 (alto modulo di *shear*).

Tabella 3.1: Ampiezze dei differenti modi per alcuni valori di ξ , nel modello con sole onde di Rayleigh.

ξ	x	$ u_X ^2$	$ u_Z ^2$	$ u_\theta ^2$	$ W ^2$	$\text{Re}(u_X^* u_\theta)$	$\text{Re}(u_Z^* u_\theta)$
0.05	0.906341	0.205364	0.0069625	0.00768199	26.9653	0.039719	0.0073134
0.1	0.899137	0.202112	0.00829349	0.00922382	23.6009	0.0431769	0.00874629
0.15	0.890805	0.198383	0.00996476	0.0111862	20.3917	0.047108	0.0105578
0.2	0.881076	0.194074	0.0120819	0.0137127	17.3529	0.0515875	0.0128715
0.25	0.869605	0.189053	0.0147859	0.017003	14.5024	0.0566962	0.0158557
0.3	0.855931	0.183154	0.0182625	0.0213364	11.8598	0.0625128	0.0197397
0.35	0.839449	0.176168	0.0227494	0.0271004	9.44716	0.0690959	0.0248298
0.4	0.819359	0.167837	0.0285323	0.0348227	7.28824	0.0764496	0.031521
0.45	0.794622	0.157856	0.035909	0.04519	5.40682	0.0844601	0.0402831
0.5	0.763932	0.145898	0.045085	0.059017	3.82389	0.0927926	0.0515828

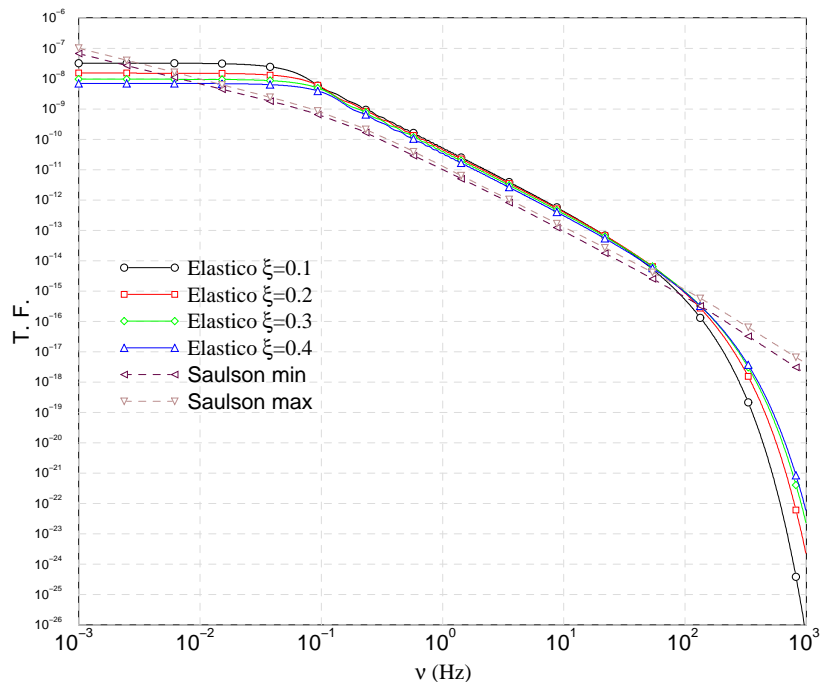


Figura 3.2: Funzione di trasferimento tra il rumore sismico ed il rumore newtoniano. Le quattro curve sono stimate con diversi valori di ξ . Si è supposto lo specchio libero ($H(\omega) = -\omega^2$).

Abbiamo riportato in figura 3.2 i valori numerici della funzione di trasferimento tra l'ampiezza spettrale del rumore sismico trasverso e l'ampiezza spettrale del rumore newtoniano per il modello elastico e per quello di Saulson definita come

$$\text{T.F.} = \left| \frac{\delta L(\omega)}{L} \right| < \delta x_i(0)^2 >^{-1} . \quad (3.87)$$

Tutte le curve sono state costruite con la funzione di trasferimento del pendolo $H(\omega) = -\omega^2$, supponendo cioè che la massa test si comporti come se fosse libera.

È evidente che, nell'intervallo di frequenze 0.1–50 Hz tutti i modelli danno stime dello stesso ordine di grandezza con una funzione di trasferimento che scala con l'inverso del quadrato della frequenza. La stima ottenuta con il nostro modello elastico è leggermente maggiore di quella di Saulson in questa regione. Nella regione di frequenze > 50 Hz il comportamento della funzione di trasferimento è determinato dall'altezza del punto di sospensione degli specchi. Comunque nel

modello di Saulson l'influenza di h è piccola, mentre nel modello elastico essa causa l'evidente smorzamento della funzione di trasferimento ad alte frequenze.

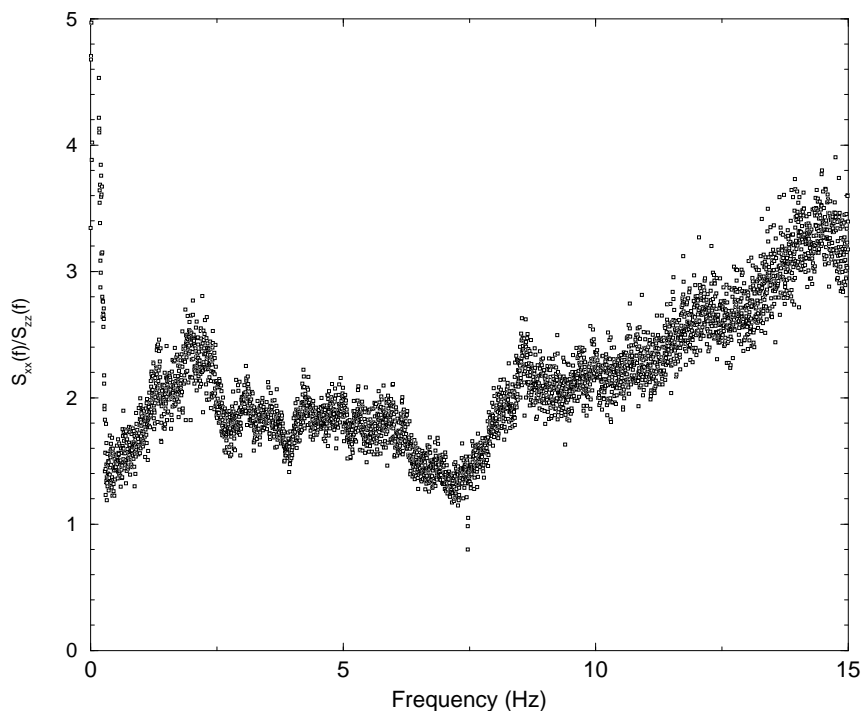


Figura 3.3: Stima sperimentale del rapporto tra lo spettro di rumore sismico orizzontale e quello verticale.

Le ipotesi che abbiamo fatto per semplificare il modello hanno conseguenze che possono essere verificate sperimentalmente in modo semplice. Se sono presenti solo i modi di Rayleigh abbiamo alcune relazioni quantitative tra le diverse correlazioni che possono essere ottenute dalle eqs.(3.78–3.83). In particolare possiamo scrivere

$$\langle \delta x^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{|u_X|^2}{|u_Z|^2} \langle \delta z^2 \rangle . \quad (3.88)$$

Per dare una stima grossolana della validità di questa relazione abbiamo valutato gli spettri di potenza del rumore sismico orizzontale e verticale utilizzando alcune misure preliminari nell'intervallo $[0 - 15]$ Hz. Il rapporto dei due spettri mediato è graficato rispetto alla frequenza in figura 3.3. Come possiamo vedere il rapporto è approssimativamente costante per $f < 6$ Hz, mentre per frequenze più grandi è approssimativamente crescente linearmente. Abbiamo verificato che in questo intervallo vi è una leggera dipendenza dal tempo di osservazione. Questi sono solo risultati preliminari. Per una verifica dettagliata del modello sono necessarie misure

del rumore sismico per tempi più lunghi, per avere una rilevanza statistica delle conclusioni, e la stima delle correlazioni a distanza finita.

3.3 Curva di sensibilità di VIRGO

A questo punto siamo in grado di stimare la curva di sensibilità dell'intereferometro VIRGO. Il suo spettro di rumore, che riportiamo in figura 3.4, è dato dalla somma di tutti i contributi di rumore descritti nelle sezioni precedenti. La parte a basse frequenze è dominata dal rumore termico, quella ad alte frequenze dal rumore *shot*. La migliore sensibilità dello strumento si ha nella zona tra 10 e 1000 Hz.

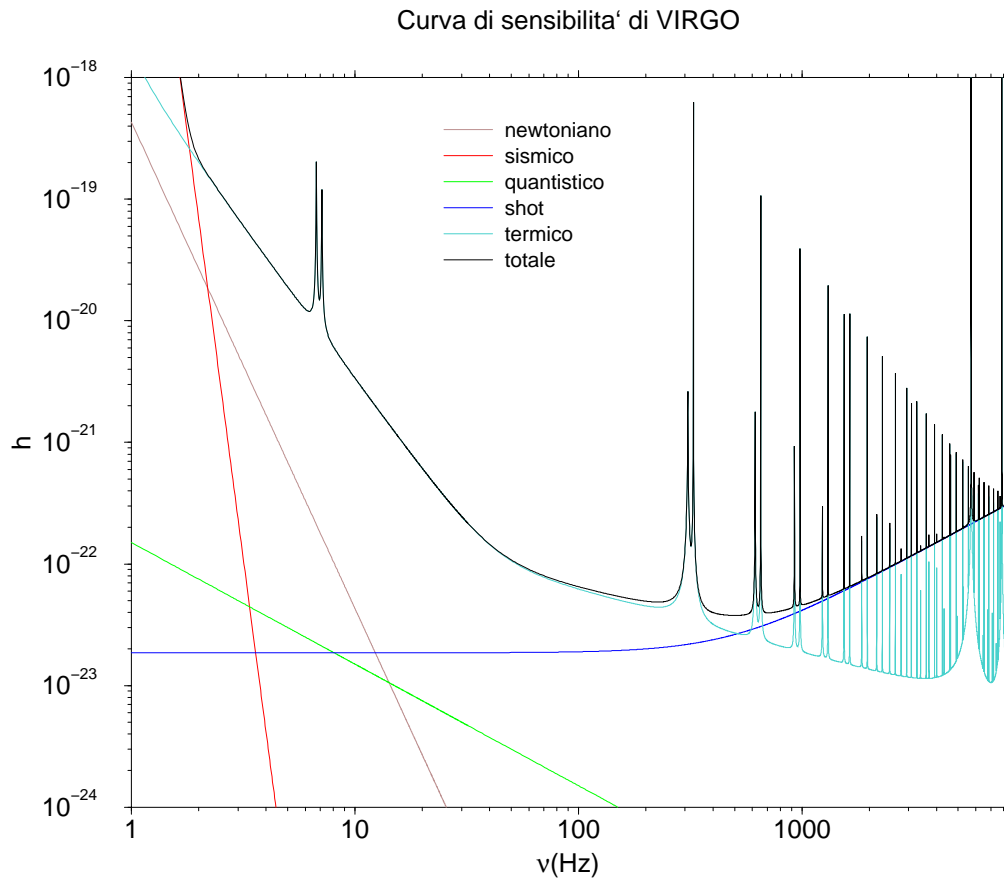


Figura 3.4: Curva di sensibilità del rivelatore VIRGO.

Capitolo 4

Algoritmi per la rivelazione del segnale gravitazionale

Nei capitoli precedenti abbiamo trattato separatamente gli argomenti segnali gravitazionali e sensibilità dell'apparato di rivelazione, sottolineando le difficoltà sperimentali nel costruire un rivelatore con una buona sensibilità e la difficoltà teorica nel conoscere le forme d'onda gravitazionali. A questo punto i due argomenti si raccordano nel problema della rivelazione di un segnale gravitazionale nel fondo di rumore dell'apparato sperimentale.

L'analisi dei dati in uscita da un rivelatore in presenza di rumore deve trattare due problemi: il problema della rivelazione e quello della misura [30] [31]. Il primo consiste nel verificare se un segnale è presente o meno nella sequenza di dati; il secondo nel misurare alcuni dei parametri sconosciuti che caratterizzano il segnale in questione: il problema della misura, quindi, presuppone già la presenza del segnale.

Nella sezione 4.1 riassumeremo i principi statistici fondamentali per la teoria dell'analisi dei segnali [31] utili per comprendere gli algoritmi descritti nelle sezioni 4.2 e 4.3.

L'analisi dei segnali fornisce sempre risposte di natura probabilistica. La presenza del rumore nel rivelatore crea problemi in due modi: può simulare la presenza del segnale e può coprire la presenza del segnale. In ciascuno dei due casi interferisce con la capacità di determinare la presenza del segnale e con quella di misurarne i parametri. Quindi l'affermazione della rivelazione di un segnale deve essere associata ad una probabilità che esprima il livello di confidenza con il quale siamo "certi" della presenza del segnale. Analogamente, bisogna indicare una probabilità con la quale i parametri misurati sono in un certo intervallo di valori.

Concentriamoci sul problema della rivelazione dei segnali.

4.1 Approccio alla Bayes

Consideriamo una sequenza di dati $s(t)$ che rappresenta l'uscita del rivelatore. La sequenza ha sicuramente una componente di rumore $n(t)$ e può contenere una componente di segnale $h(t)$. Inoltre il segnale può essere caratterizzato da un insieme di parametri che indichiamo con il vettore θ . Quindi

$$s(t) = \begin{cases} n(t) & \text{se il segnale non è presente,} \\ n(t) + h(t, \theta) & \text{se il segnale è presente.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Assumiamo che θ sia continuo. Indichiamo la probabilità che $h(t, \theta)$, per parametri θ indeterminati, sia presente in $s(t)$ con

$P(h|s) \equiv$ la probabilità condizionata che un segnale di forma $h(t, \theta)$, con θ sconosciuti sia presente nella sequenza $s(t)$ di dati osservata.

In quello che segue abbiamo bisogno di introdurre le seguenti probabilità

- $P(s|h)$ la probabilità di misurare s assumendo che il segnale h sia presente;
- $P(h)$ la probabilità a priori che il segnale h sia presente;
- $P(s)$ la probabilità che la sequenza di dati $s(t)$ sia osservata;
- $P(0)$ la probabilità a priori che il segnale non è presente;
- $P(s|0)$ la densità di probabilità di osservare $s(t)$ in assenza di segnale;
- $P[s|h(\theta)]$ la densità di probabilità di osservare $s(t)$ assumendo che $h(t, \theta)$ con un particolare θ sia presente;
- $p(\theta)$ la densità di probabilità a priori che il segnale $h(t)$ sia caratterizzato da θ .

Utilizzando la legge di Bayes sulle probabilità condizionate possiamo esprimere $P(h|s)$ come

$$P(h|s) = \frac{P(s|h)P(h)}{P(s)}. \quad (4.2)$$

Se esprimiamo $P(s)$ in termini delle due probabilità che il segnale h sia assente e che sia presente, ed inoltre riesprimiamo la probabilità che h è presente in termini della probabilità che sia caratterizzato da un particolare θ abbiamo:

$$P(s) = P(s|0)P(0) + P(s|h)P(h) \quad (4.3)$$

$$= P(s|0)P(0) + P(h) \int d^N \theta p(\theta) P[s|h(\theta)]. \quad (4.4)$$

Utilizzando le equazioni (4.2) e (4.3) otteniamo

$$P(h|s) = \frac{P(s|h)P(h)}{P(s|0)P(0) + P(h) \int d^N \theta p(\theta) P[s|h(\theta)]} \quad (4.5)$$

e con un po' di algebra possiamo scrivere

$$P(h|s) = \frac{\Lambda}{\Lambda + P(0)/P(h)}, \quad (4.6)$$

dove

$$\Lambda \equiv \int d^N \theta \Lambda(\theta) = \int d^N \theta p(\theta) \frac{P[s|h(\theta)]}{P(s|0)}. \quad (4.7)$$

Quindi la probabilità condizionata che il segnale $h(t, \theta)$ con parametri sconosciuti θ sia presente nella sequenza di dati osservati dipende dalle probabilità a priori $P(0)$ e $P(h)$ e dal rapporto Λ di *likelihood* che bisogna calcolare.

Stimata $P(h|s)$, dobbiamo fissare una soglia per affermare la presenza o meno del segnale nei dati in uscita dal nostro rivelatore. La scelta della soglia dipende dalla strategia utilizzata per minimizzare gli errori. Possiamo scegliere di porre una soglia sui falsi allarmi, ossia sulla possibilità di affermare la presenza del segnale in sua assenza, oppure possiamo scegliere una soglia sulla probabilità di perdere il segnale quando è presente.

Se non conosciamo le probabilità a priori $P(h)$ e $P(0)$, allora possiamo fissare la regola di decisione non su $P(h|s)$, ma su Λ :

$$\begin{aligned} \text{se } \Lambda &\geq \Lambda_* && \text{il segnale è presente;} \\ \text{se } \Lambda &< \Lambda_* && \text{il segnale è assente.} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Se fissiamo la soglia Λ_* richiedendo che la probabilità di falsi allarmi sia un certo valore allora la regola di decisione (4.8) è quella che in letteratura viene detta di un osservatore di *Neyman-Pearson*.

4.1.1 Rivelazione di segnali in un fondo di rumore stazionario gaussiano

La probabilità condizionata di misurare $s(t)$ se il particolare segnale $h(t, \theta)$ è presente è uguale alla probabilità condizionata di misurare $s'(t) = s(t) - h(t, \theta)$ assumendo che il segnale $h(t, \theta)$ non sia presente in $s'(t)$:

$$P[s|h(\theta)] = P[s - h(\theta)|0]. \quad (4.9)$$

Consideriamo quindi la probabilità condizionata di misurare la sequenza di dati $s(t)$ sotto l'assunzione che non sia presente alcun segnale $P(s|0)$. In assenza di segnale, $s(t)$ è semplicemente un esempio del rumore $n(t)$.

Supponiamo che $n(t)$ sia un processo normale con media zero, caratterizzato dalla funzione di correlazione $C(\tau)$ (o equivalentemente nello spazio di Fourier dalla densità spettrale $S(\nu)$). Per calcolare il rapporto $P[s|h(\boldsymbol{\theta})]/P(s|0)$ consideriamo il limite continuo di dati campionati discretamente $\{s_i : i = 1, \dots, N\}$, con la corrispondenza

$$s_i = s(t_i), \quad (4.10)$$

$$t_i - t_j = (i - j)\Delta t, \quad (4.11)$$

$$\Delta t = \frac{T}{N-1}. \quad (4.12)$$

La probabilità che un particolare s_i sia un campione del processo random $n(t)$ è data da

$$P(s_i|0) = \frac{\exp[-\frac{1}{2} \frac{s_i^2}{C(0)}]}{[2\pi C(0)]^{1/2}}, \quad (4.13)$$

mentre la probabilità che l'insieme ordinato $\{s_i : i = 1, \dots, N\}$ sia un campionamento di $n(t)$ è

$$P(s|0) = \frac{\exp[-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N C_{jk}^{-1} s_j s_k]}{(2\pi)^N \det[C_{ij}]^{1/2}}, \quad (4.14)$$

dove

$$C_{ij} \equiv C[(i - j)\Delta t]. \quad (4.15)$$

È possibile [30], sfruttando le relazioni precedenti ed il teorema di Wiener-Khintchine, dimostrare che

$$e^{2\pi i \nu t_k} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^2} \frac{1}{2} S(\nu) \widetilde{C}^{-1}(\nu, t_k), \quad (4.16)$$

dove

$$\widetilde{C}^{-1}(\nu, t_k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt C^{-1}(t, t_k) e^{2\pi i \nu t}. \quad (4.17)$$

Con \widetilde{C}^{-1} ed il teorema di Parseval possiamo scrivere

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \sum_{j,k=1}^N C_{jk}^{-1} s_j s_k = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \frac{\widetilde{s}(\nu) \widetilde{s}^*(\nu)}{S(\nu)}, \quad (4.18)$$

dove con $\widetilde{s}(\nu)$ abbiamo indicato la trasformata di Fourier di $s(t)$. Viene introdotto in maniera naturale il prodotto scalare interno simmetrico

$$\langle s, h \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \frac{\widetilde{s}(\nu) \widetilde{h}^*(\nu)}{S(\nu)} \quad (4.19)$$

per le funzioni reali s e h .

Quindi per il rapporto di *likelihood* abbiamo

$$\begin{aligned}
 \Lambda(\boldsymbol{\theta}) &= p(\boldsymbol{\theta}) \frac{P[s|h(\boldsymbol{\theta})]}{P(s|0)} = p(\boldsymbol{\theta}) \frac{P[s - h(\boldsymbol{\theta})|0]}{P(s|0)} \\
 &= p(\boldsymbol{\theta}) \frac{\exp[-\frac{1}{2} < s - h(\boldsymbol{\theta}), s - h(\boldsymbol{\theta}) >]}{\exp[-\frac{1}{2} < s, s >]} \\
 &= p(\boldsymbol{\theta}) \exp[< s, h(\boldsymbol{\theta}) > - \frac{1}{2} < h(\boldsymbol{\theta}), h(\boldsymbol{\theta}) >] .
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

A questo punto lo studio del rivelatore ottimale dipende caso per caso dalla quantità di informazione che abbiamo sui parametri $\boldsymbol{\theta}$.

4.1.2 Rapporto segnale–rumore

Consideriamo per esempio la rivelazione semplice (come definita in [31]) in cui si vuole rivelare un segnale di forma e parametri noti in un fondo di rumore stazionario e gaussiano. Il rapporto di *likelihood* in questo caso è

$$\Lambda = \exp(< s, h > - \frac{1}{2} < h, h >) , \tag{4.21}$$

dove solo la quantità $< s, h >$ dipende dalla sequenza di ingresso s e Λ è una funzione monotona crescente di $< s, h >$. Possiamo quindi utilizzare anziché Λ per la regola di decisione di presenza del segnale la stessa quantità $< s, h >$ ed una soglia s_* :

$$\begin{aligned}
 \text{se } &< s, h > \geq s_* && \text{il segnale è presente,} \\
 \text{se } &< s, h > < s_* && \text{il segnale è assente.}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Notiamo che l'operatore $< s, h >$ agisce linearmente su s ; questo vuol dire che il rivelatore ottimale nel caso di rivelazione semplice in presenza di rumore gaussiano è un rivelatore lineare che dipende dalla forma del segnale h e dallo spettro di rumore $S(\nu)$.

L'azione di un filtro lineare per segnali di forma nota può essere caratterizzato dal rapporto **segnale–rumore** all'uscita del filtro

$$\rho = \frac{< h, h >^2}{< h, n >^2} = < h, h > \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \frac{\tilde{h}(\nu) \tilde{h}^*(\nu)}{S(\nu)} . \tag{4.23}$$

Il significato statistico del rapporto-segnale rumore si apprezza nel momento in cui vogliamo indicare la probabilità di rivelazione corretta.

La probabilità di falsi allarmi e di rivelazione corretta sono determinate dalla quantità s_* e dalla densità di probabilità di $< s, h >$. La quantità $< s, h >$, essendo una combinazione lineare

delle variabili gaussiane s_i , è essa stessa distribuita gaussianamente. Se riceviamo solo rumore, allora

$$\mathcal{E}[\langle n, h \rangle] = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{E}[\langle n, h \rangle^2] = \langle h, h \rangle, \quad (4.24)$$

dove $\mathcal{E}[\]$ indica il valore di aspettazione. Se invece abbiamo $s = h + n$, allora

$$\mathcal{E}[\langle s, h \rangle] = \langle h, h \rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{E}[\langle s, h \rangle^2] = \langle h, h \rangle. \quad (4.25)$$

Quindi in assenza di segnale la densità di probabilità della quantità $\langle s, h \rangle$ è

$$p_0(\langle s, h \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle h, h \rangle}} \exp -\frac{\langle s, h \rangle^2}{2 \langle h, h \rangle}, \quad (4.26)$$

mentre in presenza del segnale

$$p_h(\langle s, h \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle h, h \rangle}} \exp -\frac{(\langle s, h \rangle - \langle h, h \rangle)^2}{2 \langle h, h \rangle}. \quad (4.27)$$

La probabilità di falsi allarmi F è uguale alla probabilità che la quantità $\langle s, h \rangle$ superi la soglia s_* in presenza di solo rumore:

$$F = \int_{s_*}^{\infty} p_0(\langle s, h \rangle) d\langle s, h \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\phi_*}^{\infty} \exp -\frac{\phi^2}{2} d\phi, \quad (4.28)$$

dove $\phi_* = s_*/\langle h, h \rangle$.

In modo analogo la probabilità di rivelazione corretta è

$$D = \int_{s_*}^{\infty} p_h(\langle s, h \rangle) d\langle s, h \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\phi'_*}^{\infty} \exp -\frac{\phi^2}{2} d\phi, \quad (4.29)$$

dove $\phi'_* = \phi_* - \sqrt{\langle h, h \rangle}$.

Se fissiamo dunque le probabilità F e D possiamo trovare il rapporto segnale-rumore ρ richiesto:

$$\rho = \langle h, h \rangle = (\phi_* - \phi'_*)^2 \quad \text{per} \quad D \geq F. \quad (4.30)$$

4.1.3 Misura dei parametri del segnale

La misura dei parametri del segnale presuppone la presenza del segnale nella sequenza s e quindi che le probabilità a priori che il segnale sia presente o assente sono

$$P(h) = 1, \quad P(0) = 0. \quad (4.31)$$

A questo punto ci poniamo il problema di misurare tutti o alcuni dei parametri θ che caratterizzano il segnale $h(\theta)$. La probabilità a posteriori che nella sequenza di dati s vi sia il segnale caratterizzato dai parametri θ è

$$P(h(\theta), s) = \frac{\Lambda(\theta)}{\Lambda}, \quad (4.32)$$

dove ricordiamo che

$$\Lambda \equiv \int d^N \theta \Lambda(\theta) = \int d^N \theta p(\theta) \frac{P[s|h(\theta)]}{P(s|0)}.$$

Il risultato del processo di misura fornisce il valore più probabile per i parametri θ . Quindi misurare i parametri significa trovare il valore di θ per cui l'uscita del filtro ottimale, ossia $\Lambda(\theta)$, risulti massimizzata. Per un rivelatore in cui il fondo di rumore è gaussiano, il filtro ottimale che fornisce anche il valore più probabile per i parametri da misurare si ottiene massimizzando la quantità 4.20. Se non vogliamo misurare tutti i parametri che caratterizzano il segnale, allora bisogna integrare il rapporto di *likelihood* rispetto ai parametri a cui non siamo interessati e per i quali dobbiamo porre le probabilità a priori, e massimizzare la quantità 4.20. Se assumiamo che il massimo globale di $\Lambda(\theta)$ sia anche un estremo locale, allora $\hat{\theta}$ soddisfa

$$\frac{\partial \Lambda(\theta)}{\partial \theta_i} = 0 \quad (4.33)$$

e $\hat{\theta}$ massimizza

$$\ln \Lambda(\theta) = \ln p(\theta) + 2 \langle h(\theta), s \rangle - \langle h(\theta), h(\theta) \rangle. \quad (4.34)$$

Quindi l'insieme di equazioni da risolvere è

$$\frac{\partial \ln p(\hat{\theta})}{\partial \theta_i} + 2 \left\langle \frac{\partial h}{\partial \theta_i}(\hat{\theta}), s - h(\hat{\theta}) \right\rangle = 0. \quad (4.35)$$

La condizione suscritta è necessaria, ma non sufficiente, affinché $\hat{\theta}$ sia la parametrizzazione più probabile. Infatti l'equazione (4.35) può essere soddisfatta da diversi valori di $\hat{\theta}$.

Un modo per caratterizzare l'intensità del segnale nel rivelatore è il rapporto segnale-rumore SNR. Il “vero” SNR dipende dalla “vera” parametrizzazione del segnale $\tilde{\theta}$, a cui non abbiamo accesso. Quello che abbiamo a disposizione è il valore più probabile $\hat{\theta}$, e definiamo il rapporto segnale-rumore in termini di esso:

$$\text{SNR}^2 = \rho = \langle h(\hat{\theta}), h(\hat{\theta}) \rangle. \quad (4.36)$$

Se il rapporto segnale rumore osservato è sufficientemente elevato e abbiamo misurato alcuni parametri del segnale, dobbiamo anche indicare l'accuratezza con cui i parametri sono stati misurati. Un limite inferiore all'errore deriva dal limite di Cramer-Rao come mostrato in Appendice C.

4.2 Rivelazione di segnali periodici

In sezione 1.2.1 abbiamo descritto le sorgenti probabili di segnali periodici ed il segnale atteso da esse. Riprendiamo l'espressione (1.11)

$$h_0 = 4.21 \times 10^{-24} \left[\frac{\text{ms}}{P} \right]^2 \left[\frac{\text{Kpc}}{r} \right] \left[\frac{I}{10^{38} \text{ Kg m}^2} \right] \left[\frac{\epsilon}{10^{-6}} \right]$$

per ottenere una stima approssimativa del rapporto segnale–rumore di queste sorgenti per il rivelatore VIRGO. Delle stelle di neutroni catalogate come pulsar (catalogo TMLC95) conosciamo il periodo di rotazione P , la distanza r , una stima approssimata per I , ma non possediamo informazioni sul parametro ϵ . È difficile avere una stima di ϵ : la stima teorica dipende molto dal modello che utilizziamo per descrivere la struttura interna della stella di neutroni ed è assai difficile ricavarla dai dati sperimentali. È possibile, tuttavia, fissare un limite superiore del valore corrispondente a ciascuna pulsar già catalogata [32] nel catalogo TMLC95.

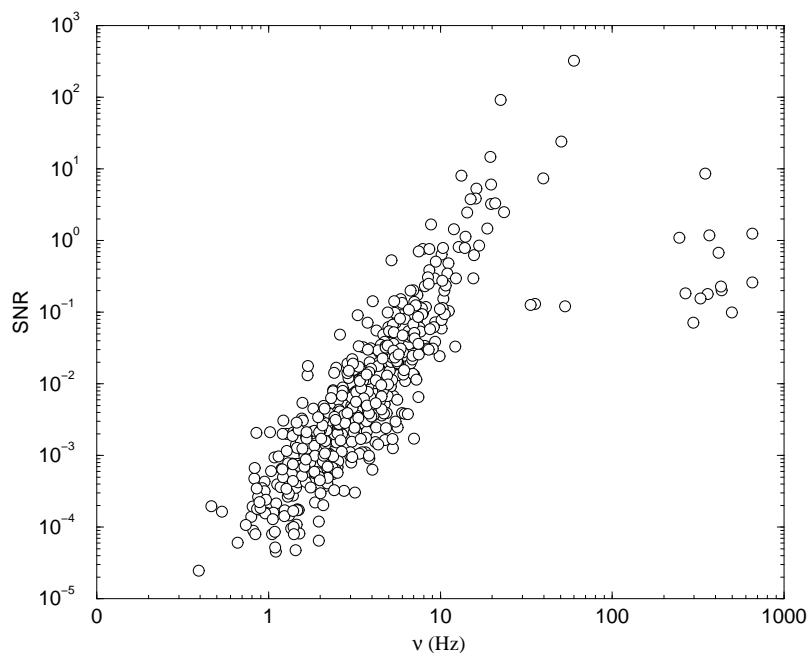


Figura 4.1: Rapporto segnale–rumore massimo per le pulsar catalogate nel catalogo TMLC95

Supponiamo che il rallentamento osservato del periodo di rotazione delle pulsar sia dovuto unicamente alla perdita di energia attraverso emissione di radiazione gravitazionale.

Eguagliando l'energia cinetica della pulsar

$$\frac{dE}{dt} = I\Omega_p \frac{d\Omega_p}{dt}, \quad (4.37)$$

dove Ω_p è la frequenza di rotazione della pulsar, all'energia persa gravitazionalmente

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32G}{5c^5} I^2 \epsilon^2 \omega_p^2, \quad (4.38)$$

otteniamo

$$\epsilon_{max} = 6.0 \sqrt{\left[\frac{P}{\text{ms}} \right]^3 \dot{P}}, \quad (4.39)$$

avendo supposto $I \simeq 10^{38} \text{Kg m}^2$. Per la maggior parte delle pulsar il valore di ϵ_{max} risulta compreso tra 10^{-2} e 10^{-6} [32]. In realtà il valore di ϵ sarà molto più piccolo di quello stimato con la relazione (4.39) giacché il meccanismo più probabile di perdita di energia cinetica è quello di emissione elettromagnetica di dipolo e l'energia gravitazionale eventualmente persa sarà una frazione esigua di quella persa elettromagneticamente [33]. In figura 4.1 riportiamo il rapporto segnale-rumore (SNR) per quelle pulsar il cui valore di \dot{P} è sufficientemente alto da essere stato misurato. La quantità SNR è stata stimata rispetto ad un tempo di integrazione del segnale pari a T come

$$\text{SNR}_{max} = \sqrt{\rho_{max}} = \frac{h_0^{max}}{\sqrt{S(\omega_p/2\pi)}} \times \sqrt{T}, \quad (4.40)$$

dove ω_p è la frequenza di emissione gravitazionale della pulsar e h_0^{max} è stato ottenuto dall'equazione (1.11) con $\epsilon = \epsilon_{max}$.

In figura 4.1 sono riportati i risultati per un tempo di integrazione pari a tre anni: solo 22 pulsar hanno $\text{SNR}_{max} > 1$. È chiaro dunque che per poter avere un rapporto segnale-rumore tale da permettere la rivelabilità di tale tipo di segnale, occorre avere tempi di osservazione molto lunghi.

Quello che non abbiamo ancora detto è che integrare il segnale su tempi così lunghi è vantaggioso solo se conosciamo la posizione della pulsar. Come vedremo il segnale monocromatico emesso dalla pulsar, integrato su tale ordine di tempo, non ha uno spettro monocromatico a causa della modulazione doppler dovuta al moto relativo sorgente-osservatore che distribuisce la potenza del segnale su una banda ampia di frequenze. Questo problema può essere risolto con una opportuna demodulazione del segnale. Tuttavia per poter fare questa operazione è necessario conoscere la posizione della sorgente.

La ricerca su tutto il cielo, la cosiddetta *blind search*, di segnali monocromatici necessiterebbe, come stimato da Schutz [34], l'esame di un numero di posizioni pari a

$$N_{zone} = 1.3 \times 10^{13} \left(\frac{\omega_p}{2\pi \text{ KHz}} \right)^2 \left(\frac{T_{oss}}{10^7 \text{ s}} \right)^4. \quad (4.41)$$

Una tale analisi richiederebbe tempi e potenze di calcolo proibitivi. Per questo motivo, nel lavoro svolto abbiamo studiato la possibilità di osservare *on line* i segnali gravitazionali eventualmente provenienti dalle pulsar di cui già conosciamo la posizione ed il periodo di rotazione grazie alle osservazioni radio–astronomiche.

4.2.1 Descrizione del segnale ricevuto

Il segnale può essere parametrizzato come

$$\begin{aligned} h(t_n) &= F^+(t_n)A^+ \cos(\omega_p t_n + \delta(t_n) + \phi^{(+)}) \\ &+ F^\times(t_n)A^\times \cos(\omega_p t_n + \delta(t_n) + \phi^{(\times)}), \end{aligned} \quad (4.42)$$

dove $t_n = ndt$ e dt è il passo di campionamento. $F(t)$ descrive la variazione della sensibilità dell'apparato dovuta essenzialmente al moto di rotazione terrestre e si può quindi pensare come una funzione lentamente variabile del tempo (su scale dell'ordine delle ore) dipendente dalla orientazione dell'interferometro, dalla posizione della sorgente e dallo stato di polarizzazione dell'onda gravitazionale (+ o \times).

Le funzioni δ descrivono lo spostamento doppler della frequenza di emissione della pulsar dovuta al moto relativo osservatore–sorgente. A causa della presenza dei fattori F e δ il segnale non è monocromatico e l'applicazione diretta dei metodi spettrali non permette la sua identificazione.

Consideriamo solo l'effetto della modulazione di ampiezza e supponiamo che il segnale gravitazionale che giunge sul rivelatore sia puramente sinusoidale alla frequenza ω_p . La modulazione in ampiezza dovuta al moto giornaliero della terra rispetto alla sorgente dipende dalla frequenza di modulazione ω_r e da $2\omega_r$. Questo causa nello spettro del segnale la comparsa di quattro bande laterali rispetto alla frequenza portante ω_p , alle frequenze $\omega_p \pm \omega_r$ e $\omega_p \pm 2\omega_r$ [35] [36].

L'effetto $\delta(t)$ di modulazione in frequenza del segnale dovuto al moto relativo sorgente osservatore può essere scritto come

$$\delta(t) = -\frac{\omega_p}{c} \mathbf{r}_{\text{ob}} \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (4.43)$$

dove \mathbf{r}_{ob} indica la posizione della terra nel sistema del baricentro solare e $\hat{\mathbf{s}}$ è il versore posizione della pulsar in coordinate equatoriali.

Semplifichiamo il problema supponendo che l'orbita di rivoluzione della terra sia circolare e che l'unica frequenza di modulazione ω_m del segnale sia quella di rivoluzione. A causa di questa modulazione in frequenza il segnale può essere scritto come sovrapposizione di onde monocromatiche, secondo lo sviluppo

$$\cos(\omega_p t + \beta \cos(\omega_m t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\beta) \cos[(\omega_p + 2k\omega_m)t]$$

$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\beta) \sin[(\omega_p + (2k+1)\omega_m)t] , \quad (4.44)$$

dove $\beta = \omega_p/\omega_m \times (v_{rel,max}/c)$ e J sono funzioni di Bessel. Di conseguenza lo spettro di potenza si decompone in una portante alla frequenza ω_p , più un numero infinito di bande laterali alle frequenze armoniche $\omega_p \pm k\omega_m$. L'ampiezza della portante e delle bande laterali dipende da β secondo la formula (4.44).

Usando la relazione ¹

$$\frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 J_k^2(\beta)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta)} = \frac{\beta^2}{2} , \quad (4.45)$$

si vede facilmente che il segnale è disperso su $O(\beta)$ bande.

Per il moto di rivoluzione terrestre risulta $\beta \sim 3 \times 10^5$ per una frequenza tipica del segnale $\omega_p = 100Hz$. A causa della modulazione, dopo un anno di integrazione, il picco spettrale dovuto ad un ipotetico segnale monocromatico sarà in realtà disperso su $O(\beta)$ picchi di ampiezza $O(1/\sqrt{\beta})$, con un conseguente peggioramento del rapporto segnale-rumore che renderà impossibile la rivelazione.

Se la posizione della sorgente è nota possiamo assumere la conoscenza della funzione $\delta(t)$ e reinterpretare la sequenza di dati come la somma di un segnale monocromatico (a parte la modulazione di ampiezza) e di un termine di rumore con la campionatura variabile descritta dal tempo riscalo

$$\tilde{t}_n = f(t_n) = t_n + \frac{1}{\omega_p} \delta(t_n) . \quad (4.46)$$

4.2.2 Metodo di Lomb

Usando l'approccio Bayesiano è possibile derivare l'estimatore spettrale "ottimale" per processi non equispaziati, cioè quello che massimizza la probabilità di determinazione del parametro di frequenza.

Riscriviamo il rapporto di *likelihood* $\Lambda(\boldsymbol{\theta})$ come

$$\Lambda(\boldsymbol{\theta}) = Np(\boldsymbol{\theta}) \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{s} - \mathbf{h})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{s} - \mathbf{h}) \right) , \quad (4.47)$$

dove C è la matrice di correlazione del rumore.

Possiamo specializzarci al caso che ci interessa, ponendo

$$\mathbf{h} = \mathbf{V}^T \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \gamma(\tilde{t}_1) \cos w\tilde{t}_1 & \gamma(\tilde{t}_1) \sin w\tilde{t}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \gamma(\tilde{t}_i) \cos w\tilde{t}_i & \gamma(\tilde{t}_i) \sin w\tilde{t}_i \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

¹I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, Eq. 8.536.2

dove $\gamma(t)$ è una funzione nota che descrive la modulazione di ampiezza e \tilde{t} è il tempo ri-parametrizzato.

Supponiamo adesso che le probabilità a priori per la frequenza $p(\omega)$ e per le ampiezze \mathbf{a} siano indipendenti e che $p(\mathbf{a})$ sia una distribuzione piatta.

Stiamo cercando la distribuzione di probabilità a posteriori per il parametro ω e quindi possiamo calcolare l'integrale gaussiano sulle ampiezze \mathbf{a} :

$$\Lambda(\omega) = p(\omega) \frac{N}{(\det \mathbf{V} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{V}^T)^{1/2}} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{s}^T (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{V}^T (\mathbf{V} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V} \mathbf{C}^{-1}) \mathbf{s} \right] \quad (4.49)$$

che, usando la decomposizione $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{K} \mathbf{K}^T$, può essere scritta nella forma

$$\Lambda(\omega) = p(\omega) \frac{N}{(\det \mathbf{P} \mathbf{P}^T)^{1/2}} \exp \left[\frac{1}{2} (\mathbf{K}^T \mathbf{s})^T (\mathbf{P}^T (\mathbf{P} \mathbf{P}^T)^{-1} \mathbf{P}) (\mathbf{K}^T \mathbf{s}) \right]. \quad (4.50)$$

La matrice \mathbf{K} è un filtro di che trasforma il rumore in un rumore delta-correlato (filtro di *whitening*), $\mathbf{P} = \mathbf{V} \mathbf{K}$ è definita da

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1,j} &= \sum_k \gamma(t_k) \cos \omega \tilde{t}_k \mathbf{K}_{k-j}, \\ \mathbf{P}_{2,j} &= \sum_k \gamma(t_k) \sin \omega \tilde{t}_k \mathbf{K}_{k-j}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

da cui

$$\mathbf{P} \mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} \sum_i \mathbf{P}_{1,i} \mathbf{P}_{1,i} & \sum_i \mathbf{P}_{1,i} \mathbf{P}_{2,i} \\ \sum_i \mathbf{P}_{1,i} \mathbf{P}_{2,i} & \sum_i \mathbf{P}_{2,i} \mathbf{P}_{2,i} \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

e

$$(\mathbf{P} \mathbf{P}^T)^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{P} \mathbf{P}^T} \begin{pmatrix} \sum_i \mathbf{P}_{2,i} \mathbf{P}_{2,i} & -\sum_i \mathbf{P}_{1,i} \mathbf{P}_{2,i} \\ -\sum_i \mathbf{P}_{1,i} \mathbf{P}_{2,i} & \sum_i \mathbf{P}_{1,i} \mathbf{P}_{1,i} \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Il rapporto di *likelihood* $\Lambda(\omega)$ è massimo quando è massima la quantità

$$\left[\frac{1}{2} (\mathbf{K}^T \mathbf{s})^T (\mathbf{P}^T (\mathbf{P} \mathbf{P}^T)^{-1} \mathbf{P}) (\mathbf{K}^T \mathbf{s}) \right]. \quad (4.54)$$

La matrice $\mathbf{P} \mathbf{P}^T$ definisce la generalizzazione del concetto di spettro di potenza appropriata per il problema considerato. Le formule precedenti sono le più utili per una efficiente implementazione numerica. Possiamo reinterpretare la quantità (4.54) come la norma della sequenza \mathbf{s} trasformata. Nel caso $\gamma(\tilde{t}_i) = 1$ (nessuna modulazione di ampiezza) e $\mathbf{K} = \mathbf{1}$ (rumore bianco) tale sequenza è detta trasformata di Lomb-Scargle [37].

Rivelare il segnale e stimarne la frequenza corrisponde a cercare il massimo dello spettro generalizzato definito da $\mathbf{P} \mathbf{P}^T$. Usando tale procedura è possibile ottenere in maniera naturale

la demodulazione del segnale, essenzialmente interpretandolo come una sequenza non equispaziata, in accordo con la formula (4.46), e pesando ciascun dato con la sensibilità istantanea dell'apparato.

Modificare la spaziatura dei tempi altererà naturalmente le caratteristiche dello spettro di potenza del rumore. Se quest'ultimo è stazionario si può però mostrare che

$$\tilde{S}(\omega) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta) S(\omega + k\omega_m), \quad (4.55)$$

dove $S(\omega)$ è lo spettro di potenza prima della riparametrizzazione temporale. Se lo spettro è localmente regolare possiamo valutare la prima correzione attorno a ω_p

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\omega_p) &\simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta) \left(S(\omega_p) + k\omega_m S'(\omega_p) + \frac{1}{2}k^2\omega_m^2 S''(\omega_p) + O(k^3\omega_m^3) \right) \\ &= S(\omega_p) + \frac{\beta^2}{4}\omega_m^2 S''(\omega_p) + O(\beta^4\omega_m^4 S''''(\omega_p)). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Notiamo che il parametro rilevante nell'espansione precedente è piccolo rispetto a ω_p

$$\beta\omega_m = \omega_p \frac{v_{rel,max}}{c} \sim 10^{-4}\omega_p \quad (4.57)$$

per velocità relative osservatore–sorgente non relativistiche. Dalle formule precedenti segue che lo spettro di potenza non sarà distorto se dipende con buona approssimazione linearmente dalla frequenza nell'intervallo $\omega_p \pm \beta\omega_m$. In particolare lo spettro di potenza di un rumore bianco rimarrà inalterato, mentre in generale le zone pericolose saranno attorno ai massimi e ai minimi locali di $S(\omega)$.

Per una singola pulsar non è sufficiente utilizzare un solo filtro di Lomb per ottenere la modulazione corretta. Le pulsar catalogate sono affette da errori sperimentali sulla frequenza e sulla posizione. Entrambe le indeterminazioni influiscono sull'efficienza di rivelazione del segnale. L'indeterminazione sulla posizione diminuisce l'efficienza soprattutto a causa dell'effetto doppler [38]. È necessario quindi demodulare il segnale rispetto ad un numero di “celle” angolari intorno alla posizione della pulsar all'interno della indeterminazione sperimentale.

La frequenza di rotazione delle pulsar è nota con buona precisione e quindi la sua indeterminazione influenza poco il numero di filtri; tuttavia occorre seguire le frequenze nell'intervallo tra ω_p e $2\omega_p$ e quindi utilizzare un numero di filtri proporzionale al rapporto tra l'intervallo di frequenze che si vuole seguire e la risoluzione con la quale vogliamo effettuare l'analisi. Fissata l'efficienza con cui vogliamo rivelare il segnale, il numero N_{Lomb} di demodulazioni necessarie per una data pulsar sarà dato quindi da:

$$N_{Lomb} = N_c \times \Delta\omega_p \times T \times N_{freq} \quad (4.58)$$

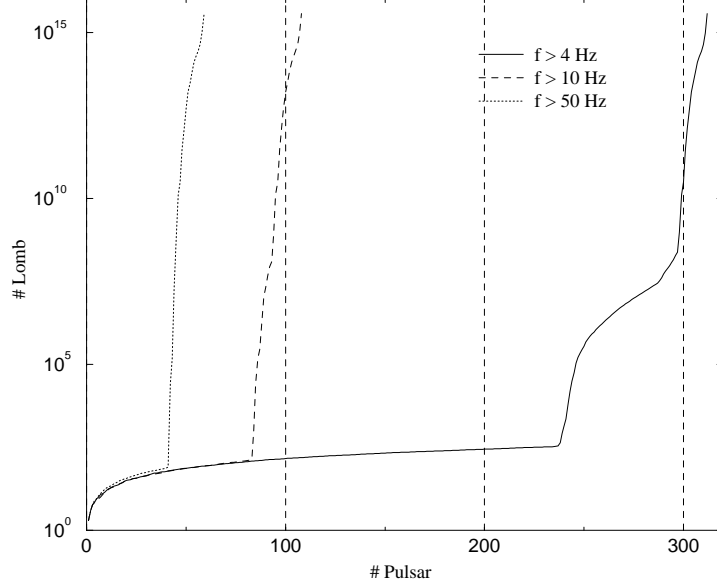


Figura 4.2: Numero di demodulazioni necessarie al controllo di un dato numero di pulsar note, in funzione del numero di pulsar che si richiede di controllare.

dove N_c è il numero di celle angolari, $\Delta\omega_p$ l'errore sperimentale in frequenza, T il tempo di integrazione e N_{freq} il numero di frequenze che si vuole seguire.

In figura 4.2 riportiamo il numero di demodulazioni necessarie per seguire in tempo reale il numero di pulsar note rispetto alla frequenza minima delle pulsar rivelabile dall'esperimento VIRGO. La maggioranza delle pulsar richiede essenzialmente una sola cella, mentre per un gruppo minoritario è necessario seguire molte più celle ($\geq 10^5$).

Il valore massimo di N_{lomb} al quale ha senso arrivare, a meno di considerazioni sul rapporto segnale-rumore delle pulsar, dipende dal taglio inferiore in frequenza dell'apparato sperimentale. Per $f_{min} \sim 50Hz$ sarà possibile controllare circa 30 pulsar con un $N_{lomb} \sim 10^2$. Se $f_{min} \sim 10Hz$ il costo computazionale resta circa invariato, ma il numero di pulsar cresce fino ad 80.

Nell'ipotesi ottimale di riuscire ad ottenere una frequenza minima di sensibilità dell'apparato $f_{min} = 4Hz$ con $N_{lomb} \sim 10^3$ si possono controllare circa 240 pulsar. Per ottenere ulteriori incrementi significativi, ed arrivare ad esempio a $N_p \sim 300$, si devono raggiungere potenze di calcolo che, come vedremo, sono a tutt'oggi improponibili.

4.3 Rivelazione di fenomeni di coalescenza

In sezione 4.1.1 abbiamo trovato il filtro ottimale per un rivelatore con rumore gaussiano, nel caso in cui la forma del segnale h sia nota, ma non siano noti i parametri θ che lo caratterizzano. A questo punto se vogliamo misurare alcuni parametri di tale segnale dobbiamo massimizzare la quantità (4.20) rispetto a tali parametri come in sez. 4.1.3.

Nel caso di segnali gravitazionali provenienti da coalescenze di binarie, la forma d'onda del segnale è nota se siamo nel dominio di validità dello sviluppo post-Newtoniano.

Normalizziamo la forma d'onda e integriamo $\Lambda(A, \theta')$ rispetto all'ampiezza A , considerando indipendenti le densità di probabilità a priori della distribuzione dell'ampiezza $p(A)$ e quelle degli altri parametri $p(\theta')$. Se integriamo su una distribuzione a priori piatta $p(A)$ otteniamo

$$\Lambda(\theta') = N \exp \frac{1}{2} \langle h(\theta'), s \rangle^2 . \quad (4.59)$$

Per implementare il filtraggio ottimale occorre massimizzare $\Lambda(\theta')$ rispetto ai parametri θ' ; questo si ottiene quando il prodotto scalare

$$\langle h(\theta'), s \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\nu, \theta') s^*(\nu)}{S(\nu)} d\nu = \int_0^T dt s(t) M(t, \theta') \quad (4.60)$$

è massimo. In (4.60) abbiamo introdotto il **filtro di Wiener**

$$M(t, \theta') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu t} \frac{h(\nu, \theta')}{S(\nu)} d\nu , \quad (4.61)$$

dove ricordiamo che $S(\nu)$ è lo spettro di rumore del rivelatore.

Se il segnale è presente nei dati con un certo spostamento temporale t_0 rispetto alla sagoma $h(\theta')$, occorre effettuare una massimizzazione anche rispetto al tempo di arrivo t_0 , il che equivale a calcolare la convoluzione in dipendenza dal tempo di arrivo del segnale e della sagoma

$$\langle h(\theta'), s \rangle(t_0) \equiv \int_0^T dt s(t) M(t - t_0, \theta') \quad (4.62)$$

e a massimizzare contemporaneamente sui parametri θ e sul parametro t_0 .

Nelle applicazioni pratiche è possibile calcolare le convoluzioni ottenendo una stima per tutti i possibili istanti di arrivo t_0 utilizzando la formula

$$C(t_0, \theta') = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t_0 \nu} \tilde{h}(\nu) S(\nu)^{-1} \tilde{s}(-\nu) d\nu , \quad (4.63)$$

che consente di utilizzare una trasformata di Fourier veloce. Il tempo t_0 di arrivo corrisponde al tempo t per cui è massima la quantità $C(t, \theta')$.

Come discusso nelle sezioni 4.1.2 e 4.1.3, trovare il massimo di $C(t, \theta')$ non è sufficiente per affermare di aver rivelato il segnale e averne misurato i parametri θ' : è necessario confrontare $\max_{t, \theta'} C(t, \theta')$ rispetto ad una soglia e quindi trovare il rapporto-segnale rumore minimo richiesto per superare tale soglia.

4.3.1 Stima del rapporto segnale–rumore

Utilizziamo l'approssimazione Newtoniana per la forma del segnale cercato $h(t, \theta)$ per stimare la quantità $\langle h, h \rangle$. Calcoliamo la densità spettrale $h(\nu)$ utilizzando l'approssimazione di fase stazionaria nel calcolo dell'integrale

$$\tilde{h}(\nu) = \int_R dt H(t) \cos \phi(t) e^{-2\pi i \nu t} . \quad (4.64)$$

Per $\nu > 0$ si trova

$$\tilde{h}(\nu) = \frac{1}{2} H(\hat{t}) e^{i(-2\pi\nu\hat{t} + \phi(\hat{t}))} \sqrt{\frac{2\pi}{i\phi''(\hat{t})}} , \quad (4.65)$$

dove \hat{t} è legato a ν da

$$2\pi\nu = \dot{\phi}(\hat{t}) . \quad (4.66)$$

Allora

$$|\tilde{h}(\nu)|^2 = \frac{1}{4} \frac{h(\hat{t})^2}{\dot{\nu}} . \quad (4.67)$$

Il rapporto segnale–rumore massimo si ottiene integrando su tutto l'intervallo di frequenze:

$$\text{SNR}^2 = \langle h, h \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{h}(\nu)|^2}{S(\nu)} . \quad (4.68)$$

Noi non abbiamo accesso all'intervallo di frequenze $[-\infty, \infty]$, ma ad una banda ν_{\min}, ν_{\max} . Se sostituiamo l'espressione per h ed utilizziamo l'espressione per il modello dello spettro di rumore di VIRGO in cui abbiamo considerato le tre sorgenti principali:

- 1) rumore termico dei pendoli,
- 2) rumore termico degli specchi,
- 3) *shot noise* ad alte frequenze,

otteniamo che frequenze di taglio inferiori o dell'ordine di $\nu_{\min} = 30$ Hz sono sufficienti a recuperare più del 95 % del SNR totale, come è evidente in figura (4.3) dove riportiamo il rapporto segnale–rumore integrato da un taglio inferiore ν_{\min} fino a 1000 Hz [38].

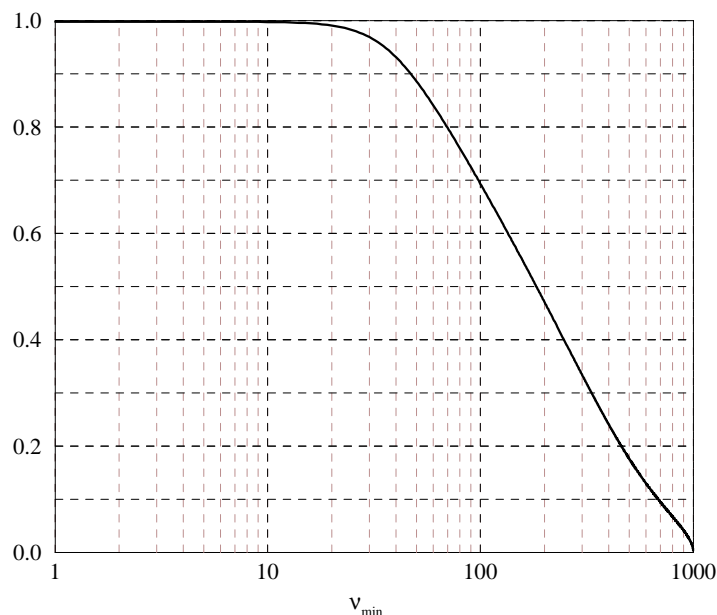


Figura 4.3: SNR integrato sulla banda $[\nu_{\min}, 1000]$ Hz e normalizzato al SNR totale

4.3.2 Correlazione tra filtri

La quantità SNR che abbiamo calcolato è il valore ottimale che si può ottenere potendo variare in piena libertà la sagoma $h(\boldsymbol{\theta})$. È però indispensabile capire come essa dipenda da un'eventuale differenza tra i parametri della sagoma e quelli del segnale. Dato un insieme finito di filtri \mathcal{F} avremo a disposizione un numero finito di parametri fisici $\boldsymbol{\theta}$. Più grande sarà \mathcal{F} minore sarà l'attenuazione del SNR. È ovvio che sarà la potenza di calcolo a disposizione a fissare la massima dimensione accettabile di \mathcal{F} . Sia ora $\boldsymbol{\theta} = (\tau, t, \Phi_0)$ l'insieme dei parametri tempo di coalescenza τ , tempo di arrivo t e fase Φ_0 al tempo $t = 0$. Non è ovvio per quale elemento di \mathcal{F} si abbia massima sovrapposizione con il segnale dato e quindi minima attenuazione del rapporto segnale–rumore. Ci occorre la correlazione di due segnali con diversi $\boldsymbol{\theta}$:

$$C(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \frac{\tilde{h}(\nu, \boldsymbol{\theta}_1) \tilde{h}^*(\nu, \boldsymbol{\theta}_2)}{S(\nu)}. \quad (4.69)$$

Sostituendo l'espressione di $h(\nu)$ troviamo che

$$C(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) = C(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2) \equiv C(\Delta\boldsymbol{\theta}). \quad (4.70)$$

Ricordiamo che siamo interessati alla massima correlazione che può essere ottenuta al variare di $\Delta\Phi$ e Δt per un certo $\Delta\tau$, funzione della cosiddetta *chirp mass* $\mathcal{M} = K^{3/5}$. La massimizzazione sulla differenza di fase può essere fatta analiticamente poiché

$$C(\Delta\tau) = \max_{\Delta t, \Delta\Phi} C(\Delta\theta) = \max_{\Delta t} [C(\Delta\tau, \Delta t, 0)^2 + C(\Delta\tau, \Delta t, \pi/2)^2]^{1/2} \quad (4.71)$$

dove è chiaro che $C(\Delta\tau, \Delta t, \pi/2)$ si ottiene da $C(\Delta\tau, \Delta t, 0)$ sostituendo il coseno con un seno. Quindi per ogni $\Delta\tau$ il valore massimo si trova massimizzando una funzione di Δt soltanto. Riportiamo nella figura 4.4 la funzione $C(\Delta\tau)$ ottenuta con diversi valori della frequenza ν_0 che il segnale ha a $t = t_0$.

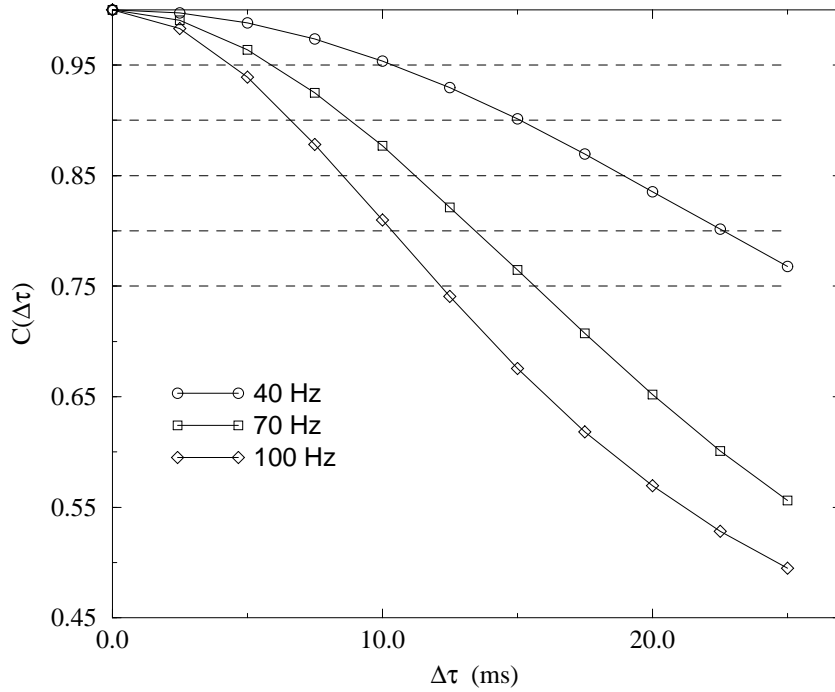


Figura 4.4: Decadimento della funzione di correlazione

A questo punto possiamo fissare il numero di filtri che servono per studiare coalescenze in un certo range di masse. Fissato il valore minimo della *chirp mass*, il tempo più lungo del fenomeno di coalescenza è

$$\tau_{max} = 3.0 \left(\frac{\mathcal{M}}{M_{\odot}} \right)^{-5/3} \left(\frac{\nu_0}{100 \text{ Hz}} \right)^{-8/3}. \quad (4.72)$$

Fissato inoltre $C(\Delta\tau)$, il numero di filtri che si devono considerare è

$$n_f = \frac{\tau_{max}}{\Delta\tau}. \quad (4.73)$$

4.4 Una possibile implementazione degli algoritmi su APEmille

Valutiamo il costo computazionale richiesto per l'implementazione degli algoritmi descritti per la ricerca in linea dei segnali gravitazionali provenienti dalle pulsar note e per un'analisi di pre-filtraggio in linea per i segnali di coalescenza. In particolare consideriamo l'efficienza con cui questi algoritmi possono essere implementati sulla macchina parallela APEmille

Il progetto APEmille prevede la realizzazione di un sistema SIMD, dotato nella configurazione massima di 2048 processori, ciascuno con una potenza di picco di 200 MFlops² e una memoria locale di 4 MWords³ [39]: tra i numerosi miglioramenti del sistema APEmille, rispetto al predecessore APE100, è importante sottolineare la presenza dell'indirizzamento locale, che consentirà alle diverse unità di calcolo di accedere contemporaneamente a locazioni di memoria non omologhe.

4.4.1 Inseguimento in linea delle pulsar note

Per quantificare il costo computazionale dell'applicazione del metodo di Lomb al segnale in uscita dall'interferometro in termini di Mflop/sec richiesti, discutiamo brevemente una possibile strategia di implementazione [38], facendo riferimento alle formule riportate in sezione 4.2.2.

Distinguiamo, per una data demodulazione, tre diverse operazioni

1. La generazione dei tempi riscaliati t_k . Il costo di quest'ultima operazione, che dipende dalla raffinatezza delle correzioni che si intendono includere nel rescaling dei tempi, può essere valutato attorno a $(20 - 40)$ operazioni per numero N_{lomb} di modulazioni ad ogni passo.
2. Applicazione della matrice di "whitening" \mathbf{K}^T (cfr. sezione 4.2.2) in un'intervallo locale di frequenze intorno alla frequenza della pulsar puntata. Questo richiede ad ogni passo p prodotti e $p - 1$ somme, indipendentemente dal numero di modulazioni (con un costo computazionale irrilevante), se pensiamo a \mathbf{K}^T come ad una regressione di ordine p (vedi capitolo 6).
3. Aggiornamento delle matrici \mathbf{P} e $\mathbf{P}\mathbf{P}^T$, ed aggiornamento della matrice $\mathbf{P}\mathbf{K}^T$ s. L'aggiornamento di \mathbf{P} richiede $2N_{lomb} p$ moltiplicazioni e $N_{lomb} p$ somme, il ricalcolo della matrice

²MFlops=10⁶ operazioni al secondo

³1MWords=10⁶ × 4bytes

$\mathbf{P}\mathbf{P}^T$ $3 N_{lomb}$ prodotti e $3 N_{lomb}$ somme, e l'aggiornamento di $\mathbf{P}\mathbf{K}^T\mathbf{s}$ N_{lomb} prodotti e N_{lomb} somme.

La parte rilevante del costo computazionale complessivo è quindi dell'ordine di $(30 + 8 + 3p)N_{lomb}$ ad ogni passo. L'operazione di *whitening* può essere effettuata localmente, giacché siamo interessati alla ricerca del segnale in una stretta banda di frequenze intorno ad ω_p della pulsar. Per tale operazione può essere sufficiente considerare una regressione (vedi capitolo 6) con $p \sim 4$. In realtà la strategia dell'esperimento potrebbe essere quella di effettuare il *whitening* dei dati in uscita dall'interferometro in linea e quindi di analizzare il segnale su un rumore bianco. In questo caso non dovremmo più effettuare alcuna operazione di *whitening* nel filtro di Lomb e $p = 0$.

Supponiamo per il momento che $p = 4$ e che quindi il numero di operazioni ad ogni passo sia $\sim 50N_{lomb}$. Per le frequenze alle quali siamo interessati si può pensare ad una riduzione della frequenza di campionamento fino a 5 KHz , e quindi ad una potenza di calcolo di $0.25N_{lomb}$ Mflop/sec. Usando il numero di demodulazioni “ottimale” discusso precedentemente otteniamo una potenza di calcolo richiesta di 250 Mflop/sec.

Ci attendiamo tuttavia che la potenza di calcolo richiesta possa crescere notevolmente. Infatti, la nostra stima si riferisce ad un solo anno di integrazione del segnale. Per alcune pulsar, il cui rapporto segnale-rumore è basso è necessario aumentare il tempo di integrazione. All'aumentare del tempo di integrazione gli effetti dell'errore angolare non aumentano (il matching è periodico su un anno), ma la risoluzione in frequenza cresce linearmente, e così il numero di celle da seguire. Inoltre il numero di pulsar catalogate radio-astronomicamente cresce ad un ritmo di circa 150 ogni due anni.

Non abbiamo considerato la ricerca di pulsar non note, perché i costi computazionali per la *blind search* su tutto il cielo sono proibitivi. Tuttavia possiamo pensare ad una *blind search* mirata, ossia alla ricerca di segnali gravitazionali in zone della sfera celeste in cui è più probabile trovare stelle di neutroni [7]. In questo caso si potrà rendere opportuno l'utilizzo del calcolo parallelo. È evidente come il metodo di Lomb sia intrinsecamente parallelo. L'efficienza dell'implementazione su APEmille sarà molto elevata: non occorre una memoria *cache*, poiché il rapporto fra calcoli e accesso in memoria è relativamente alto, e la stessa occupazione di memoria è relativamente modesta e consente di utilizzare i banchi di memoria a 4 MWords previsti dal progetto APEmille.

4.4.2 Prefiltraggio in linea per i segnali di coalescenza

Al solo scopo della rivelazione del segnale è possibile utilizzare sagome all'ordine PN0 (sviluppo post-Newtoniano all'ordine zero) a patto di accettare una riduzione minima di circa il 40%

sul rapporto segnale–rumore⁴. Questa attenuazione è dovuta al fatto che la forma d’onda Newtoniana sfrutta i suoi parametri per adattarsi al meglio al segnale fisico senza ovviamente riuscirci esattamente. Se si vuole ricoprire una parte maggiore del rapporto segnale–rumore occorre utilizzare per i filtri sagome stimate considerando i termini successivi nello sviluppo Post–Newtoniano.

Supponiamo di volere effettuare un’analisi preliminare di *triggering* dei dati con sagome Newtoniane e stimiamo la potenza di calcolo richiesta per questa operazione [38].

Fissiamo il valore massimo del tempo di coalescenza che vogliamo cercare come in eq. (4.72) e quindi il numero n_f di filtri come in eq. (4.73). Per effettuare le convoluzioni correttamente il vettore di dati per la sagoma deve avere un *padding*⁵ del 75% e quindi deve essere lungo 4 volte τ_{max} . Se i dati sono campionati alla frequenza f_c il numero di elementi del vettore è

$$N = 4f_c\tau_{max} . \quad (4.74)$$

La potenza di calcolo minima richiesta per il calcolo delle trasformate di Fourier veloci è

$$\Sigma = n_f \frac{6N \log_2 N}{4\tau_{max}} \quad (4.75)$$

sotto le ipotesi che

- 1) le trasformate di Fourier delle sagome non possano essere tenute in memoria e debbano invece essere ricalcolate per ogni gruppo di dati lunghi τ_{max} secondi,
- 2) non si considera il costo computazionale degli I/O e delle comunicazioni tra i processori.

È plausibile pensare che la potenza di calcolo reale richiesta sia almeno un fattore 2 più grande: in particolare non è stato tenuto conto del tempo necessario per generare le sagome $h(t)$. Le quantità τ_{max} , N dipendono solo da \mathcal{M} ed f_c . Invece, il numero dei filtri (che determina l’occupazione di memoria) e la potenza di calcolo richiesta sono funzioni dell’attenuazione $C(\Delta\tau)$ ammessa. Scegliamo $\nu_0 = 40$ Hz basandoci sul grafico del rapporto segnale–rumore ottimo valido per lo spettro di rumore di VIRGO. Fissiamo inoltre $f_c = 2.5$ kHz. Questo valore è sufficientemente elevato, sia perché per frequenze più alte l’incertezza teorica sulla forma del segnale diviene rilevante, sia perché il rapporto segnale rumore integrato sulle frequenze superiori a 2.5 kHz è una frazione trascurabile del totale. Per i quattro valori $\mathcal{M} = 0.25, 0.50, 0.75, 1.00 M_\odot$ riportiamo in tabella 4.1 il numero di filtri n_f e la potenza di calcolo richiesta al variare di $C(\Delta\tau)$. La

⁴Tale stima è stata ottenuta calcolando il rapporto segnale–rumore per matching tra segnale all’ordine PN1 e sagoma all’ordine PNO

⁵L’operazione di padding consiste nel creare sequenze di dati più lunghe rispetto a quella originale mettendo degli zeri nella sequenza con una opportuna finestra. Questo permette di non avere problemi dovuti alle condizioni al contorno e di avere una migliore stima spettrale.

$C(\Delta\tau)$	$\mathcal{M} = 0.25M_\odot$	n_f	Σ (Gflops)	$\mathcal{M} = 0.5M_\odot$	n_f	Σ (Gflops)
0.95		33500	11		10500	3.2
0.90		23200	7.6		7300	2.2
0.85		18400	6.0		5800	1.7
0.80		15500	5.0		4870	1.5
	$\mathcal{M} = 0.75M_\odot$			$\mathcal{M} = 1.00M_\odot$		
0.95		5360	1.5		3320	0.9
0.90		3729	1.1		2300	0.6
0.85		2950	0.8		1830	0.5
0.80		2480	0.7		1540	0.4

Tabella 4.1: Stima del numero di filtri e della potenza di calcolo richiesta a fissato valore minimo della *chirp-mass*

ricerca delle coalescenze binarie utilizzando i filtri di Wiener può essere implementata in modo naturale su calcolatori SIMD, come APEmille, sfruttando il parallelismo implicito nella ricerca su differenti filtri.

Ogni processore riceve una sequenza di dati di lunghezza $N = 4\tau_{max}$ ed effettua la ricerca del *matching* ottimale all'interno di un sottoinsieme dei filtri scelti. In dettaglio, occorre calcolare una volta per tutte la trasformata di Fourier della sequenza di dati s in ingresso, generare le sagome h locali ad ogni singolo processore e trasformarle di Fourier, infine calcolare la trasformata inversa del prodotto di ogni sagoma e della sequenza.

Per ogni sagoma, ogni processore calcola un insieme di parametri θ che individuano i *matchings* che superano la soglia prefissata. Al termine dell'analisi della sequenza s tutti i processori salvano tali parametri, i quali formano complessivamente il risultato di un'operazione di triggering di primo livello.

In generale alcuni segnali potranno essere a cavallo di due sequenze successive, quindi è necessaria una parziale sovrapposizione, pari alla lunghezza della sagoma più lunga.

La potenza di calcolo necessaria totale può essere dedotta dalla tabella 4.1, moltiplicando Σ per un fattore 2 – 3 che tiene conto della generazione delle sagome. Ci attendiamo quindi che siano necessari 20 – 30 GFlops, all'ordine newtoniano più basso (PN0), e che questa stima possa facilmente raddoppiare se si tiene conto almeno del primo ordine post-Newtoniano (PN1). La potenza all'ordine PN0 può essere sviluppata da un sistema APEmille a 256 processori, mentre ci si attende che un sistema a 512 processori possa essere in grado di utilizzare sagome all'ordine PN1.

4.5 Filtraggi sub-ottimali

Quelli che abbiamo finora considerato sono filtraggi ottimali, nel senso che se il rumore del rivelatore è stazionario e distribuito gaussianamente il modo “ottimale” di analizzare i dati si ottiene massimizzando il rapporto di *likelihood* $\Lambda(\boldsymbol{\theta})$ rispetto ai parametri che vogliamo misurare.

Nel seguito riportiamo i risultati preliminari ottenuti utilizzando tecniche sub-ottimali di analisi tempo-frequenza come quelle proposte da Innocent e Torresani [40] [41] per la rivelazione dei segnali transienti [42].

4.5.1 Analisi in Wavelet

Parametrizziamo il segnale in approssimazione Newtoniana come in [40]

$$h(t) = Ah_F(t_0 - t) \quad (4.76)$$

$$= A(t_0 - t)^\alpha \Theta(t_0 - t) \cos \left(\Phi - \frac{2\pi}{\beta + 1} F(t_0 - t)^{\beta+1} \right), \quad (4.77)$$

dove $\Theta(t)$ è la funzione di Heaviside e $\alpha = -1/4$, $\beta = -3/8$ e $t_0 = \tau$ il tempo impiegato dal sistema a coalescere partendo al tempo $t = 0$ con frequenza ν_0 . Le costanti A e F possono essere interpretate come l'ampiezza e la frequenza locale del segnale un secondo prima della coalescenza, mentre Φ è una fase globale.

Le costanti A ed F sono collegate ad i parametri fisici come segue:

$$F = \nu_0 \tau_0 = C_F \mathcal{M}^{-5/8}, \quad (4.78)$$

dove

$$C_F = \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{256} \right)^{3/8} \left(\frac{c^5}{G^{5/3}} \right)^{3/8} M_\odot^{-5/8} \quad (4.79)$$

e

$$A = C_A \frac{1}{R} \mathcal{M}^{5/4}, \quad (4.80)$$

dove la *chirp mass* \mathcal{M} è espressa in masse solari, la distanza R in Mpc e le costanti numeriche valgono $C_F \simeq 151.037$ e $C_A \simeq 3.367 \times 10^{-21}$.

4.5.2 Trasformata wavelet continua

Sia $\psi(t)$ una funzione quadrato sommabile tale che

$$0 < C_\psi \equiv \int_0^\infty |\hat{\psi}(k)|^2 \frac{dk}{k} < \infty. \quad (4.81)$$

Le funzioni che soddisfano tale proprietà sono dette wavelet progressive. Tali wavelet possono essere utilizzate per fornire una rappresentazione alternativa dei segnali. Sia $s(t)$ una funzione

quadrato sommabile a valori reali e sia $Z_s(t)$ il suo segnale analitico definito nel dominio di Fourier come $\hat{Z}_s(k) = 2\hat{h}(k)\Theta(k)$, dove $\Theta(k)$ è la funzione di Heaviside.

Allora possiamo scrivere

$$Z_s(t) = \frac{1}{C_\psi} \int T_s(b, a) \psi_{(b,a)}(t) \frac{da db}{a^2}, \quad (4.82)$$

dove le funzioni $\psi_{(b,a)}(t)$ sono le wavelet, copie traslate e scalate di $\psi(t)$

$$\psi_{(b,a)}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (4.83)$$

e i coefficienti $T_s(b, a)$ definiti da

$$T_s(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int s(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (4.84)$$

costituiscono la trasformata wavelet continua di $s(t)$. Il segnale $s(t)$ può essere ricavato dal segnale analitico come $s(t) = \Re\{Z_s(t)\}$. In generale se

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} s\left(\frac{t-t_0}{\lambda}\right), \quad (4.85)$$

allora si ha

$$T_{\tilde{s}}(b, a) = T_s\left(\frac{b-t_0}{\lambda}, \frac{a}{\lambda}\right). \quad (4.86)$$

4.5.3 Applicazione a segnali modulati in frequenza

Consideriamo segnali della forma

$$s(t) = A(t) \cos \phi(t) \quad (4.87)$$

e supponiamo che l'ampiezza $A(t)$ sia lentamente variabile rispetto alle oscillazioni. Consideriamo una wavelet analizzante a valori complessi nella forma

$$\psi(t) = A_\psi(t) \exp \phi_\psi(t) \quad (4.88)$$

e supponiamo che l'ampiezza $A_\psi(t)$ sia regolare e abbia un massimo per $t = 0$ e

$$\phi'_\psi(t) = \omega_0 = 2\pi. \quad (4.89)$$

Scrivendo la trasformata wavelet come un integrale oscillante e approssimando l'integrale per mezzo del metodo della fase stazionaria, otteniamo la seguente espressione approssimata [40]

$$T_s(b, a) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}(\Phi''_{(b,a)}(t_s))}}{\sqrt{a|\Phi''_{(b,a)}(t_s)|}} \psi^*\left(\frac{t_s-b}{a}\right) Z_s(t_s), \quad (4.90)$$

dove $\Phi''_{(b,a)}(t)$ è l'argomento dell'integrando

$$\Phi''_{(b,a)}(t) = \phi(t) - \phi_\psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (4.91)$$

e $t_s = t_s(b, a)$ è il punto stazionario dell'integrando.

L'insieme di punti

$$\{(b, a) \text{ tali che } t_s(b, a) = b\} \quad (4.92)$$

è detto *ridge della wavelet transform*. Si può facilmente vedere che il *ridge* prende la forma di una curva nel piano scala-tempo

$$a = a_r(b) = \frac{\phi'_\psi(0)}{\phi'(b)}. \quad (4.93)$$

Si definisce *skeleton* della trasformata wavelet la restrizione della trasformata wavelet al suo *ridge*

$$S_s(b) = T_s(b, a_r(b)). \quad (4.94)$$

Se indichiamo con $S(k)$ la densità di potenza spettrale *two-sided* del rumore possiamo definire la trasformata wavelet di *prewhitening* di $s(t) \in L^2(\mathbf{R})$ come

$$W_s(b, a) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\hat{s}(k)}{\sqrt{S(k)}} \times F^*(\psi_{(b,a)}) dk, \quad (4.95)$$

dove abbiamo indicato con il simbolo F l'operazione di trasformata di Fourier.

Se utilizziamo la wavelet di Morlet

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \exp(i\omega_0 t), \quad (4.96)$$

otteniamo

$$W_s(b, a) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int e^{ikb} \frac{\hat{s}(k)}{\sqrt{S(k)}} \times \hat{\psi}^*(ka) dk, \quad (4.97)$$

essendo

$$\hat{\psi}^*(ka) = \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{(\omega_0 - ka)^2}{2}\right). \quad (4.98)$$

Definiamo

$$M(b, a) = |W_s(b, a)|^2 \quad (4.99)$$

Nel caso di un segnale gravitazionale di binarie coalescenti il *ridge* della trasformata wavelet in approssimazione PNO è dato dalla curva

$$a_r(b) = \frac{\omega_0}{2\pi F} (t_0 - b)^{3/8}, \quad (4.100)$$

o equivalentemente

$$b_r(a) = t_0 - \left(\frac{2\pi a F}{\omega_0} \right)^{8/3}. \quad (4.101)$$

Dato un candidato (τ, γ) per la coppia (t_0, F) , consideriamo il *ridge* corrispondente

$$b_r(a) = \tau - \left(\frac{2\pi a \gamma}{\omega_0} \right)^{8/3} \quad (4.102)$$

ed il seguente integrale di linea

$$\mathcal{L}_s(\tau, \gamma) = \int M(b_{(\tau, \gamma)}(a), a) \frac{da}{a}, \quad (4.103)$$

che rappresenta l'integrale lungo il *ridge* $b_r(\tau, \gamma)$ dell'energia della trasformata wavelet. L'algoritmo di rivelazione del segnale è basato sul seguente problema di massimizzazione

$$\max |\mathcal{L}_s(\tau, \gamma)| = \left| \int M(b_{(\tau, \gamma)}(a), a) \frac{da}{a} \right|. \quad (4.104)$$

Come si può osservare la procedura di massimizzazione è fatta rispetto a due parametri come nel filtro di Wiener. In quel caso si massimizzava rispetto ai parametri t_0 e τ , qui si massimizza rispetto a $\nu_0(t = t_0)$ e a τ .

4.6 Alcuni risultati su simulazioni numeriche

Per gli esempi numerici seguenti abbiamo utilizzato il seguente schema

1. Generazione del segnale gravitazionale + rumore.

Sulla generazione del rumore dobbiamo fare alcune considerazioni. Nel lavoro di Innocent e Torresani [40] il rumore è stato ottenuto da una parametrizzazione teorica dello spettro di Virgo attraverso la relazione

$$n(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikt} \sqrt{S(k)} dW_k, \quad (4.105)$$

dove dW_k è una misura di rumore bianco.

Per i motivi che saranno chiariti nel capitolo 5, abbiamo preferito simulare i dati di rumore nel tempo utilizzando una modellizzazione autoregressiva del rumore di VIRGO.

Abbiamo trovato i parametri a_k del modello e con essi abbiamo prodotto una sequenza $x[n]$ di dati di rumore nel tempo con la relazione:

$$x[n] = - \sum_{k=1}^P a_k x[n-k] + \xi, \quad (4.106)$$

dove ξ è una realizzazione di un processo gaussiano bianco.

2. Stima della *whitening wavelet transform* (wwt). Essa è stata stimata direttamente lungo il *ridge* che massimizza l'integrale di linea nel modo seguente. Abbiamo considerato b lungo il *ridge* della wavelet transform (4.101) e sostituito tale valore nella wwt, ottenendo

$$W_s(b, a) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int e^{ik\tau} e^{-ik(\frac{2\pi a F}{\omega_0})^{8/3}} \frac{\hat{s}(k)}{\sqrt{S(k)}} \times \sqrt{2\pi} \exp - \frac{(\omega_0 - ka)^2}{2} dk. \quad (4.107)$$

Anche in questo caso, la wwt è stata stimata utilizzando lo spettro teorico $S(k)$ ottenuto con la parametrizzazione autoregressiva.

Noi non effettuiamo la procedura di massimizzazione come descritto in [40] rispetto alla quantità F . Nello spirito di utilizzare una procedura parallelizzabile utilizziamo come unico parametro di input nel caso PN0 la quantità F rispetto alla quale intendiamo costruire un banco di filtri, anziché massimizzare rispetto al suo valore.

3. Per ogni valore di a

$$a = \frac{1}{2a_0^j} \quad \text{dove } a_0 = 2^{1/8}, \quad (4.108)$$

abbiamo stimato la quantità $M_{ab} = |W_s(b, a)|^2$. Il valore massimo di j è scelto in modo tale che vengano esplorate tutte le frequenze fino al valore della frequenza di Nyquist $\nu = \nu_c/2$, essendo ν_c la frequenza di campionamento.

4. Infine abbiamo calcolato la quantità $\mathcal{L}_s(\tau, \gamma)$.

Bisogna notare che l'unico parametro di input è F . Come abbiamo già sottolineato F dipende unicamente dalla chirp mass come nell'eq. (4.78) e può variare da un valore minimo di 25.33 per due masse entrambe uguali a $M = 20M_\odot$ fino ad un valore massimo di 133.47 per masse uguali entrambe a $M = 1.4M_\odot$.

Con tale algoritmo spaziamo i valori di a in modo da ritrovare la scala

$$a = \frac{1}{F^{1/(\beta+1)}} = \frac{1}{F^{8/5}}. \quad (4.109)$$

L'idea è dunque la seguente: costruire un banco di filtri con parametro F differente e per ciascuno di essi implementare l'algoritmo descritto.

Nelle simulazioni numeriche abbiamo utilizzato la seguente parametrizzazione per il rumore di VIRGO:

$$S(f) = \frac{S_1}{f^5} + \frac{S_2}{f} + S_3 \left(1 + \left(\frac{f}{f_K} \right)^2 \right) + S_v(f) \quad (4.110)$$

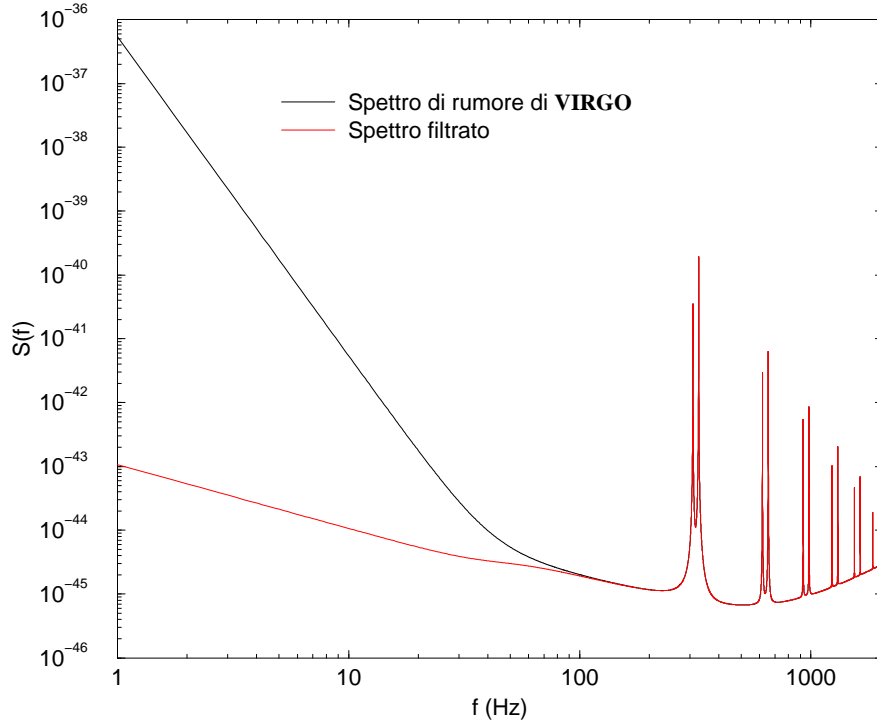


Figura 4.5: Spettro di rumore di VIRGO e spettro ottenuto con un prefiltraggio a basse frequenze.

dove

$$f_K = 500\text{Hz} \quad \text{frequenza di taglio per il rumore } shot, \quad (4.111)$$

$$S_1 = 1.08 \cdot 10^{-36} \quad \text{modo del pendolo}, \quad (4.112)$$

$$S_2 = 0.33 \cdot 10^{-42} \quad \text{modo degli specchi}, \quad (4.113)$$

$$S_3 = 3.24 \cdot 10^{-46} \quad \text{rumore } shot. \quad (4.114)$$

Il contributo dei modi di violini dei fili è stato parametrizzato come

$$S_v(f) = \sum_n \frac{1}{n^4} \frac{f_1^{(c)}}{f} \frac{C_c \phi_n^2}{\left(\frac{1}{n^2} \frac{f^2}{f_1^{(c)2}} - 1 \right)^2 + \phi_n^2} + (c \leftrightarrow f), \quad (4.115)$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che gli specchi vicini e quelli lontani hanno masse differenti

$$f_n^{(c)} = n \cdot 327 \text{ Hz} \quad f_n^{(f)} = n \cdot 308.6 \text{ Hz} \quad (4.116)$$

$$C_c = 3.22 \cdot 10^{-40} \quad C_f = 2.82 \cdot 10^{-40} \quad \phi_n^2 = 10^{-7} . \quad (4.117)$$

Nei grafici riportiamo la quantità $\mathcal{L}_{max}(\tau, F)$ in funzione del tempo di cui cerchiamo il picco, riportando in alto i parametri della simulazione. La frequenza di campionamento utilizzata nelle simulazioni è 2048 Hz.

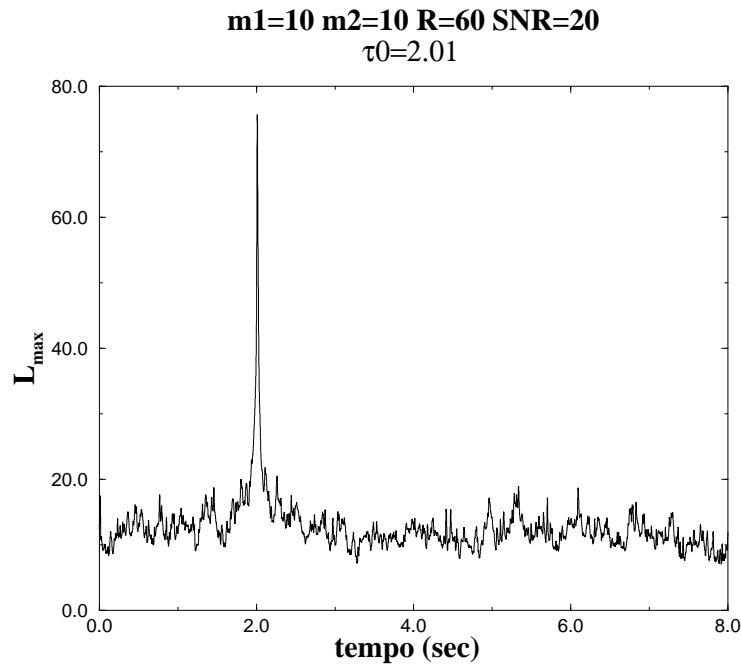


Figura 4.6: $\mathcal{L}_{max}(\tau, F)$ in funzione del tempo; SNR=20.

Nelle figure 4.6 4.7 riportiamo i risultati ottenuti simulando un segnale gravitazionale generato da una binaria di masse uguali ($M = 10 M_\odot$) poste alla distanza di 60 Mpc e 80 Mpc rispettivamente. In tutti e due i casi il valore stimato di τ_0 corrisponde al valore utilizzato nella simulazione.

Il rapporto segnale–rumore minimo necessario perché l’algoritmo trovi il segnale nel fondo di rumore è superiore, come ci si aspettava, rispetto a quello necessario rispetto al filtro di Wiener. Con un rapporto segnale–rumore $\text{SNR} = 8$ a differenza del filtro di Wiener questo algoritmo non è più in grado di rivelare il segnale.

Questo è legato al fatto che in questo algoritmo non si sommano tutti i contributi di energia presenti nella decomposizione in wavelet, ma solo quelli presenti sul *ridge*.

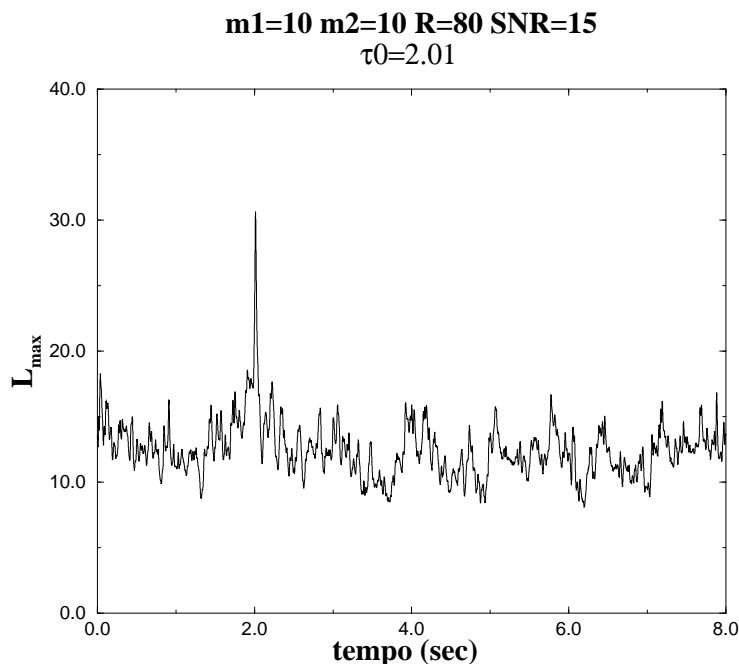


Figura 4.7: $\mathcal{L}_{max}(\tau, F)$ in funzione del tempo; SNR=15.

L'algoritmo è molto efficiente nel rivelare segnali di coalescenza con τ abbastanza corto (\sim qualche secondo) e quindi segnali provenienti da coalescenze di stelle massiccie che hanno un elevato SNR concentrato in una banda ristretta di frequenze.

Per stelle di massa $\sim 1.4M_{\odot}$ il segnale di coalescenza, partendo da una frequenza $\nu_0 \simeq 30$ Hz ha una durata di circa un minuto e risulta distribuito su una ampia banda di frequenze (30 Hz – 1000 Hz). In questo caso l'integrale $\mathcal{L}_{max}(\tau, F)$ è calcolato su una parte del *ridge* dove il segnale rimane alla stessa frequenza per la maggior parte della durata del fenomeno con un'ampiezza piccola e dove quindi domina il rumore. Per questo motivo per rivelare segnali gravitazionali provenienti da stelle piccole sono necessari valori di $\text{SNR} \geq 20$. L'algoritmo riesce a rivelare il segnale anche in questo caso, trovando il valore corretto del tempo τ_0 di coalescenza.

In figura 4.8 riportiamo l'uscita dell'algoritmo per un segnale gravitazionale generato da due stelle di massa $1.4 M_{\odot}$ poste ad una distanza di 5 Mpc immerso nel rumore di VIRGO, con una frequenza $\nu_0 = 50$ Hz.

Per verificare le prestazioni dell'algoritmo in presenza di due segnali gravitazionali con parametri τ_0 e quindi F diversi, generiamo due segnali aventi chirp Mass diverse e rapporto segnale-rumore comparabili. La ricerca del segnale viene effettuata utilizzando il *ridge* di uno dei due segnali. Come risulta evidente nella figura 4.9 l'algoritmo è in grado di rivelare i due segnali anche

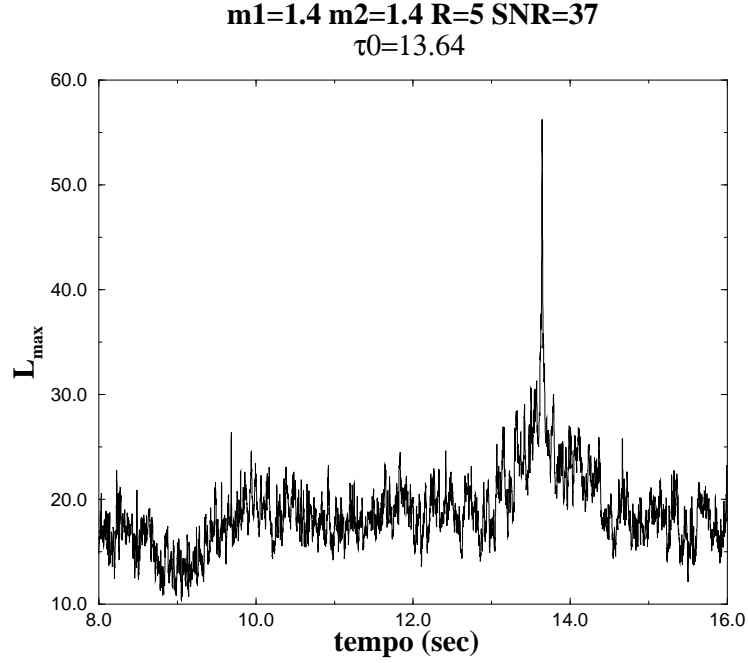


Figura 4.8: $\mathcal{L}_{max}(\tau, F)$ in funzione del tempo per segnale generato da stelle di masse $1.4 M_{\odot}$. SNR= 20.7

cercandone uno solo. I valori massimi stimati sono $\tau(1) = 3.643$ (segnale cercato) e $\tau(2) = 2.01$.

4.7 Robustezza dell'algoritmo rispetto alla forma d'onda del segnale

In questa sezione riportiamo alcuni risultati preliminari sullo studio della robustezza dell'algoritmo rispetto alla forma d'onda del segnale [42].

In generale il segnale gravitazionale di un sistema binario coalescente nell'approssimazione Post-Newtoniana può essere scritto nella forma (1.29)

$$h(t) = A\nu^{2/3} \cos \phi(t) ,$$

dove $\nu(t) = \phi'(t)$ è la frequenza locale e la fase (dipendente dal tempo) è la somma dei termini post-Newtoniani (1.30):

$$\phi(t) = \phi_0(t) + \phi_1(t) + \phi_{1.5}(t) + \phi_2(t) + \dots$$

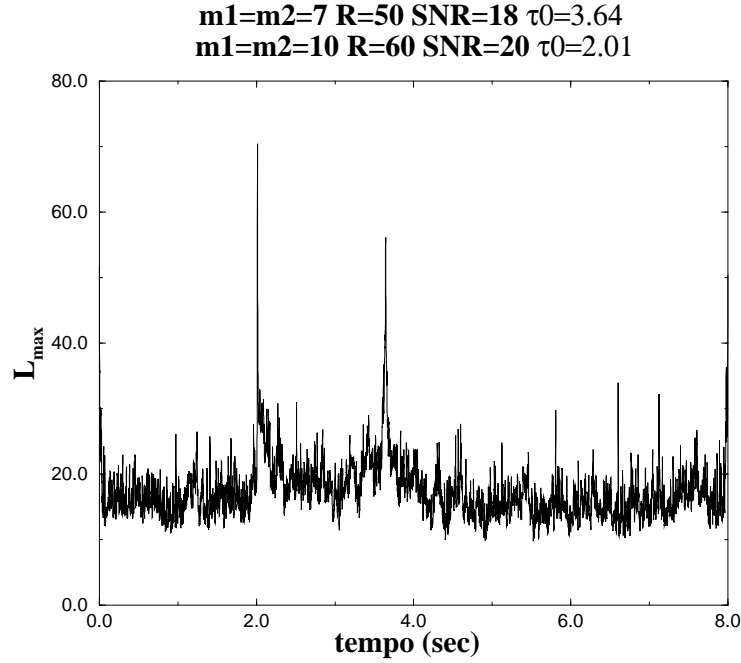


Figura 4.9: $\mathcal{L}_{max}(\tau, F)$ in funzione del tempo in presenza di due segnali gravitazionali.

Calcolo del *ridge* nel caso PN1

Ricordiamo che per un segnale del tipo (1.38) vale

$$a_r(b) = \frac{\omega_0}{\phi'(b)}. \quad (4.118)$$

All'ordine PN1 possiamo scrivere la fase $\phi(t)$ nel modo seguente

$$\phi(t) = \Phi + \frac{16\pi\nu_0\tau_0}{5} \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^{-5/3} \right] + 4\pi\nu_0\tau_1 \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^{-1} \right], \quad (4.119)$$

dove la frequenza ν è legata al tempo t attraverso la relazione

$$t = \tau_0 \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^{-8/3} \right] + \tau_1 \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^{-2} \right], \quad (4.120)$$

ed abbiamo posto $t_c = 0$ (tempo per il quale la frequenza vale ν_0). Si verifica facilmente che

$$\phi'(t) = 2\pi\nu(t), \quad (4.121)$$

per cui troviamo sul *ridge*

$$a_r(b) = \frac{\omega_0}{2\pi\nu_0 \left(\frac{\nu(b)}{\nu_0} \right)}. \quad (4.122)$$

Quindi lungo il *ridge* si ha

$$\frac{\nu(b)}{\nu_0} = \frac{\omega_0}{2\pi\nu_0 a}, \quad (4.123)$$

dove $\nu(b)$ soddisfa la relazione

$$b = \tau_0 \left[1 - \left(\frac{\nu(b)}{\nu_0} \right)^{-8/3} \right] + \tau_1 \left[1 - \left(\frac{\nu(b)}{\nu_0} \right)^{-2} \right]. \quad (4.124)$$

Il *ridge* nel caso PN1 è dunque dato da

$$b = \tau_0 + \tau_1 - \left(\frac{2\pi F a}{\omega_0} \right)^{8/3} - \left(\frac{2\pi F_1 a}{\omega_0} \right)^2, \quad (4.125)$$

dove

$$F = \nu_0 \tau_0^{3/8}, \quad (4.126)$$

$$F_1 = \nu_0 \tau_1^{1/2}. \quad (4.127)$$

Vogliamo verificare la stabilità dell'algoritmo rispetto alla scelta del *ridge* PN0 o PN1. A tale scopo procediamo nel seguente modo:

- generiamo un segnale gravitazionale di coalescenza all'ordine PN1 della durata $t_c = \tau_0 + \tau_1$;
- stimiamo il picco $V_{max}(PN1)$ della quantità $\mathcal{L}_{max}(\tau, \gamma)$ calcolata lungo il *ridge* PN1 individuando il tempo $t_c(PN1)$ di coalescenza corrispondente;
- stimiamo il picco $V_{max}(PN0)$ della quantità $\mathcal{L}_{max}(\tau, \gamma)$ calcolata lungo il *ridge* PN0 individuando il tempo $t_c(PN0)$ di coalescenza corrispondente.

L'algoritmo procede come descritto nel paragrafo 4.6, dove per il caso PN1 viene stimata la quantità

$$\sqrt{2\pi} \left[\exp - \frac{(\omega_0 - ka)^2}{2} \right] \times \frac{\sqrt{a}}{2\pi} e^{-ik((\frac{2\pi a F}{\omega_0})^{8/3} + (\frac{2\pi F_1 a}{\omega_0})^2)} \frac{\hat{s}(k)}{\sqrt{S(k)}} \quad (4.128)$$

di cui si calcola la trasformata di Fourier inversa. Nelle figure 4.10 e 4.11 riportiamo i risultati ottenuti per un valore SNR= 35 su 1000 realizzazioni del processo segnale+rumore. Le simulazioni si riferiscono ad un segnale gravitazionale di due stelle di masse $m_1 = m_2 = 10M_\odot$ con frequenza iniziale $\nu_0 = 30$ Hz, $\tau_0 = 2.011$ e $\tau_1 = 0.344$ e quindi $t_c = 2.355$. Con la frequenza iniziale scelta viene recuperato circa il 95% del SNR, come abbiamo visto nella sezione 4.3.1.

È evidente che la distribuzione di probabilità del tempo t_c ottenuta utilizzando un *ridge* PN0 risulta più allargata rispetto a quella ottenuta utilizzando il *ridge* PN1.

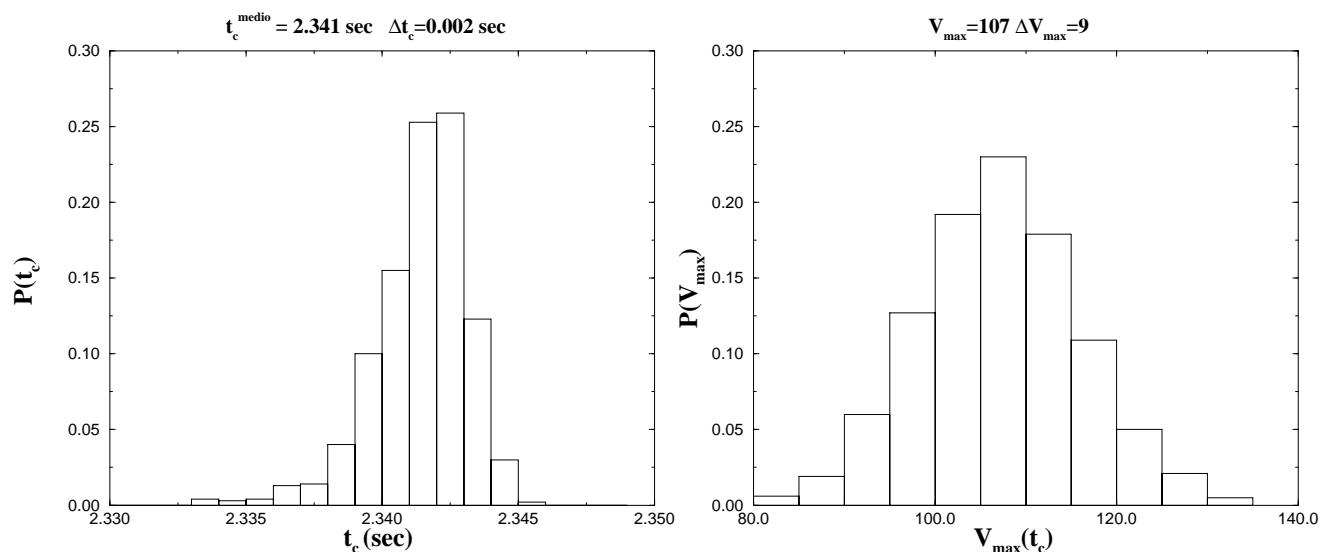


Figura 4.10: Distribuzioni della stima del tempo di coalescenza e del suo picco ottenuta su 1000 realizzazioni del processo utilizzando un *ridge* PN0 per cercare un segnale PN1

Il valore del tempo di coalescenza medio stimato nel primo caso è di 2.341 sec con una deviazione standard di 0.002 sec, nel secondo è di 2.355 sec con una deviazione standard di 0.001. Quindi la stima del tempo di coalescenza sul *ridge* PN0 è discrepante dello 0.6% rispetto alla stima ottenuta sul *ridge* PN1, la quale risulta uguale al valore del tempo di coalescenza utilizzato nella simulazione del segnale.

Le distribuzioni del picco corrispondente alla stima di t_c nel caso PN0 e PN1 risultano entrambe allargate: nel primo caso la distribuzione è centrata sul valore di $V_{\max} = 107$ con una deviazione standard di 9 e con una probabilità di picco di circa il 23%, nel secondo caso $V_{\max} = 121$ con una deviazione standard di 9 e con una probabilità di picco di circa il 20%

Questo risultato indica che, per un valore del rapporto segnale–rumore di 35, la ricerca sul *ridge* PN0 può essere un buon primo livello di *triggering* riuscendo a recuperare quasi il 90% del rapporto segnale rumore. Infatti nell’operazione di *triggering* non siamo interessati alla stima dei parametri del segnale, ma solo a rivelare la presenza di un picco nell’algoritmo di ricerca del segnale gravitazionale.

In tabella 4.2 riportiamo i risultati ottenuti, per diversi valori del rapporto segnale–rumore, come medie di 100 realizzazioni.

Anche i risultati di tabella 4.2 accreditano il fatto che l’analisi in wavelet sia robusta rispetto alla scelta dell’ordine PN del *ridge* su cui effettuare la ricerca del segnale. Sottolineiamo che questi sono risultati preliminari che necessitano di ulteriori indagini [42].

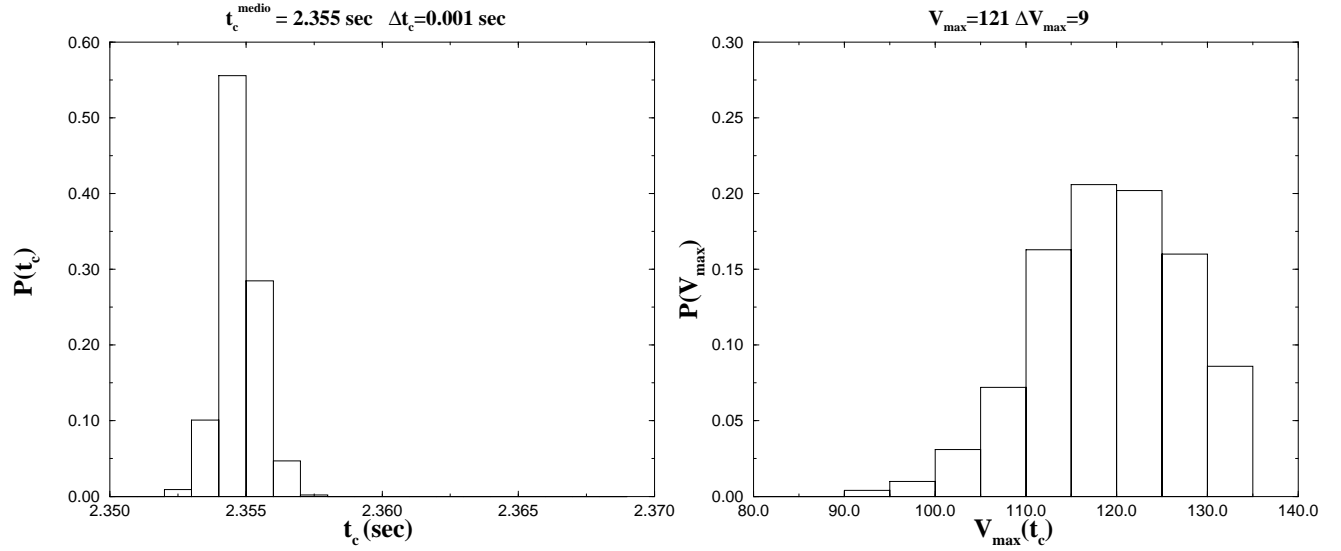


Figura 4.11: Distribuzioni della stima del tempo di coalescenza e del suo picco ottenuta su 1000 realizzazioni del processo utilizzando un *ridge* PN1 per cercare un segnale PN1

SNR	R (Mpc)	$t_c(PN0)$	$V_{max}(PN0)$	$t_c(PN1)$	$V_{max}(PN1)$
70	20	2.341 ± 0.001	395 ± 17	2.3549 ± 0.0005	446 ± 18
46	30	2.341 ± 0.001	183 ± 12	2.3547 ± 0.0007	205 ± 12
35	40	2.341 ± 0.002	107 ± 9	2.3548 ± 0.0009	121 ± 9
28	50	2.341 ± 0.002	72 ± 7	2.355 ± 0.001	82 ± 7
23	60	2.341 ± 0.003	55 ± 6	2.354 ± 0.001	61 ± 6
20	70	2.341 ± 0.003	43 ± 5	2.355 ± 0.002	48 ± 5
17	80	2.339 ± 0.006	36 ± 5	2.355 ± 0.002	40 ± 5
15	90	2.3 ± 0.2	31 ± 5	2.354 ± 0.003	35 ± 5
14	100	2.2 ± 0.5	27 ± 3	2.3 ± 0.2	30 ± 3

Tabella 4.2: Risultati per la stima della robustezza dell'algoritmo tempo-frequenza.

Capitolo 5

Modellizzazione di processi stocastici stazionari e gaussiani

Nel capitolo 4 abbiamo visto quanto sia importante la conoscenza delle caratteristiche statistiche della distribuzione di rumore dell'apparato per l'implementazione degli algoritmi di ricerca del segnale gravitazionale. L'importanza è duplice: da un lato abbiamo bisogno di conoscere accuratamente lo spettro per effettuare le operazioni di *whitening* del rumore, dall'altro, se ammettiamo di conoscere la forma teorica dello spettro, abbiamo necessità di simulare i dati di rumore nel tempo per verificare le prestazioni degli algoritmi proposti. Per questo motivo è necessario affrontare i problemi seguenti:

1. dato il processo stocastico discreto nel dominio del tempo $x[n]$ trovare il suo spettro $S(f)$;
2. dato lo spettro $S(f)$ trovare il corrispondente processo stocastico discreto nel dominio del tempo $x[n]$.

Per quanto riguarda il primo punto, in questo capitolo descriveremo gli estimatori spettrali non parametrici e parametrici utilizzati comunemente [43]. In particolare analizzeremo i vantaggi nell'utilizzare tecniche parametriche per modellizzare il rumore mostrando alcuni esempi di riproduzione di spettri teorici. Infine mostreremo come con un numero relativamente piccolo di parametri sia possibile modellizzare uno spettro di rumore complesso come quello dell'esperimento VIRGO [44].

Per il secondo punto considereremo il problema di riprodurre un filtro stabile e causale che sia in grado di riprodurre nel dominio dei tempi un processo stocastico definito dallo spettro $S(f)$. Questo può essere ottenuto in maniera semplice attraverso la fattorizzazione spettrale o con la modellizzazione parametrica dello spettro [45].

Come vedremo nel seguito, modellizzare uno spettro risulta utile anche quando vogliamo simulare i dati di rumore nel tempo partendo dalla conoscenza teorica dello spettro.

5.1 Processi stocastici discreti

Un processo stocastico discreto $x[n]$ è una sequenza di variabili random per ogni valore dell'indice n . Se n rappresenta il tempo, allora $x[n]$ è una serie temporale. Diciamo che il processo $x[n]$ è stazionario se la sua descrizione statistica non dipende dal valore di n . Questo in particolare vuol dire che tutti i momenti $\mathcal{E}\{x^{k_0}[n_0], x^{k_1}[n_1], \dots, x^{k_M}[n_M]\}$ per ogni valore delle potenze k_0, k_1, \dots, k_M e per ogni valore di M , dipendono dalla distanza L tra le variabili $x[n]$ e $x[n+L]$, ma non da n .

Spesso, come nel caso dei dati di un rivelatore di onde gravitazionali, non abbiamo a disposizione tante realizzazioni del processo ma un'unica lunga sequenza di dati. Per questo occorre sottolineare che solo se il processo è ergodico allora i momenti calcolati come media su una sequenza temporale sono uguali alle medie effettuate su un *ensemble* di realizzazioni.

Definiamo un processo discreto gaussiano un processo stocastico tale che ogni insieme di suoi campioni $\{x[n_0], x[n_1], \dots, x[n_{N-1}]\}$ ha una distribuzione gaussiana multivariata. Se assumiamo che il processo sia stazionario e a media nulla, la matrice di covarianza è uguale alla matrice di correlazione \mathbf{r}_{xx}

$$\mathbf{r}_{xx} = \begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & \dots & r_{xx}[-(N-1)] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}[-(N-2)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[N-1] & r_{xx}[N-2] & \dots & r_{xx}[0] \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

dove

$$r_{xx}[k] = \mathcal{E}\{x^*[n]x[n+k]\}. \quad (5.2)$$

Se i campioni sono presi a tempi successivi per generare il vettore $\mathbf{x} = (x[n_0], x[n_1], \dots, x[n_{N-1}])^T$, possiamo scrivere la funzione di densità di probabilità di un processo random gaussiano e reale come

$$P[\mathbf{x}] = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{r}_{xx}|^{1/2}} e^{\mathbf{x}^T \mathbf{r}_{xx}^{-1} \mathbf{x}}. \quad (5.3)$$

Ogni operazione lineare che agisce su un processo stocastico gaussiano produce un processo distribuito ancora gaussianamente.

Per un processo stocastico gaussiano la statistica del secondo ordine, ossia il momento primo e il momento secondo, è una descrizione completa del processo. Se consideriamo quindi processi reali stazionari stocastici gaussiani a media nulla la funzione di correlazione fornisce tutte le informazioni necessarie per la descrizione del processo.

La funzione di correlazione è collegata allo spettro di potenza $S(f)$ attraverso il teorema di Wiener–Khinchine:

$$S_{xx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} r_{xx}[k] \exp(-2i\pi f k), \quad (5.4)$$

dove lo spettro di potenza è definito

$$S_{xx}(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left[\frac{1}{2M+1} \left| \sum_{n=-M}^M x[n] \exp(-i2\pi f n) \right|^2 \right]. \quad (5.5)$$

Quindi un processo stocastico gaussiano stazionario a media nulla può essere descritto indifferentemente con la funzione di correlazione o con la densità spettrale.

Molti processi stocastici discreti si ottengono come il risultato di un campionamento di un processo stocastico continuo nel tempo $x(t)$, dove per evitare problemi di *aliasing*¹ campioniamo il processo continuo $x(t)$ con un periodo $T_s = \frac{1}{f_s}$, dove f_s è la frequenza massima presente nello spettro di $x(t)$.

La relazione tra il processo stocastico continuo $x(t)$ e la serie stocastica campionata discretamente $x[n]$ è data dalla formula di interpolazione di Shannon

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin \pi f_s(t - nT_s)}{\pi f_s(t - nT_s)}, \quad (5.6)$$

dove

$$x[n] = x(nT_s) \quad \text{per} \quad -\infty < n < \infty. \quad (5.7)$$

Se lo spettro del processo $x(t)$ è a banda limitata ossia se $S(f) = 0$ per $|f| > \frac{f_s}{2}$ allora la funzione di autocorrelazione nel tempo del processo stocastico discreto è data da

$$r_{xx}[n] = r(nT_s) = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} S(f) e^{i2\pi f T_s n} df. \quad (5.8)$$

Lo spettro di potenza discreto è periodico

$$S_{xx}(f) = S_{xx}(f + kf_s) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.9)$$

ed uguale allo spettro di potenza continuo nell'intervallo di Nyquist

$$S_{xx}(f) = S(f) \quad -\frac{f_s}{2} \leq f \leq \frac{f_s}{2}. \quad (5.10)$$

¹L'aliasing è una distorsione che si verifica nella ricostruzione dello spettro che non è stato campionato alla frequenza massima presente nello spettro e che quindi presenta frequenze spettrali che non appartengono allo spettro originale

5.2 Metodi non parametrici

Vogliamo risolvere ora le questioni relative alla ricerca del processo $x[n]$ se conosciamo lo spettro di potenza $S(f)$ e viceversa la stima di $S(f)$ se conosciamo il processo $x[n]$ utilizzando metodi non parametrici. A tal fine è conveniente introdurre lo spettro complesso della serie temporale discreta

$$\mathcal{S}(z) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}[n] z^{-n}. \quad (5.11)$$

Quella che abbiamo scritto in (5.11) è la trasformata z della funzione di autocorrelazione $r_{xx}[n]$. La trasformata z è l'equivalente della trasformata di Laplace per sequenze a tempi discreti, dove $z = e^{-i2\pi f}$.

Se possiamo scrivere $\mathcal{S}(z)$ nella forma

$$\mathcal{S}(z) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}[n] z^{-n} = T_s \mathcal{H}(z) \mathcal{H}(1/z^*), \quad (5.12)$$

allora possiamo generare la serie temporale discreta $x[n]$ filtrando rumore bianco nel seguente modo

$$x[n] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m] w[n-m], \quad (5.13)$$

dove $h[m]$ è la funzione impulso del filtro $\mathcal{H}(z)$:

$$h[m] = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} H(f) e^{i2\pi f T_s m} df \quad (5.14)$$

e $w[n]$ è un rumore bianco gaussiano a media nulla e varianza T_s

$$\mathcal{E}\{w[n]\} = 0 \quad \mathcal{E}\{w[n]w[n']\} = T_s \delta[n - n']. \quad (5.15)$$

5.2.1 Fattorizzazione spettrale

Consideriamo il problema della ricerca del filtro $\mathcal{H}(z)$ che ci permetta di simulare i dati di rumore $x[n]$, partendo dalla conoscenza dello spettro $\mathcal{S}(z)$. Supponendo che il segnale in ingresso sia un rumore bianco a media zero e varianza unitaria, la funzione di trasferimento $\mathcal{H}(z)$ deve soddisfare

$$\mathcal{S}(z) = \mathcal{H}(z) \mathcal{H}(1/z^*). \quad (5.16)$$

Il problema della fattorizzazione di $\mathcal{S}(z)$ non ha un'unica soluzione perché se $\mathcal{H}(z)$ è una soluzione, allora anche

$$\mathcal{H}'(z) = \pm z^{-k} \mathcal{H}(z) \quad (5.17)$$

$$\mathcal{H}''(z) = H(1/z^*) \quad (5.18)$$

sono soluzioni. È possibile mostrare che a parte un'ambiguità nel segno possiamo trovare una fattorizzazione spettrale in cui il filtro $\mathcal{H}(z)$ ed il suo inverso $1/\mathcal{H}(z)$ sono causali e stabili [46]. Affinché questo sia possibile è necessario che lo spettro $S(f)$ soddisfi la condizione di Paley-Wiener:

$$\int_{-1/2}^{1/2} |\ln S(f)| df < \infty. \quad (5.19)$$

Questa condizione non permette allo spettro $S(f)$ di avere regioni estese lungo l'asse f dove $S(f)$ sia nullo. Quindi quando effettuiamo operazioni di filtraggio sullo spettro dobbiamo stare attenti a non mandare a zero alcuna parte di esso, se vogliamo poi costruire il filtro causale e stabile nel tempo che riproduca lo spettro.

La condizione di Paley-Wiener è automaticamente soddisfatta se effettuiamo la fattorizzazione spettrale nel seguente modo. Partendo dallo spettro complesso $\mathcal{S}(z)$ definiamo *cepstrum* complesso la quantità

$$\hat{\mathcal{S}}(z) = \ln(\mathcal{S}(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{r}[n] z^{-n}, \quad (5.20)$$

dove

$$\hat{r}[n] = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{\mathcal{S}}(f) e^{i2\pi f n} df = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{\mathcal{S}}(-f) e^{i2\pi f n} df = \hat{r}[-n]. \quad (5.21)$$

Introducendo la parte causale di $\hat{\mathcal{S}}(z)$ definita come

$$\hat{\mathcal{S}}_+(z) = \frac{1}{2} \hat{r}[0] + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{r}[n] z^{-n}, \quad (5.22)$$

possiamo scrivere

$$\hat{\mathcal{S}}(z) = \hat{\mathcal{S}}_+(z) + \hat{\mathcal{S}}_+(1/z^*). \quad (5.23)$$

Allora la fattorizzazione canonica di $\mathcal{S}(z)$ è data da

$$\mathcal{H}(z) = \exp \hat{\mathcal{S}}_+(z), \quad (5.24)$$

dove $\mathcal{H}(z)$ non ha né zeri né poli all'esterno del cerchio unitario nel piano complesso.

Questo assicura che la funzione $\mathcal{H}(z)$ di risposta all'impulso sia un filtro stabile e causale che nel dominio dei tempi è dato da

$$h[n] = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) e^{i2\pi f n} df. \quad (5.25)$$

5.2.2 Il periodogramma

Quando abbiamo a disposizione i dati sperimentali discreti nel dominio del tempo $x[n]$ ci poniamo il problema della costruzione della densità di potenza spettrale (PSD) del processo.

Una stima non parametrica della PSD si ottiene attraverso il periodogramma definito come

$$P_{\text{PER}} = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-i2\pi f n) \right|^2. \quad (5.26)$$

Il periodogramma soddisfa

$$P_{\text{PER}}(f) \rightarrow P(f)$$

per un numero N di dati sufficientemente lungo ($N \rightarrow \infty$), ma la sua varianza non tende a zero per $N \rightarrow \infty$; in particolare la varianza è costante indipendentemente dal valore di N . Quindi il periodogramma è una stima inconsistente dello spettro del processo essendo la deviazione standard dell'estimatore grande quanto la sua media.

Per migliorare le qualità statistiche del periodogramma si introduce un periodogramma medio definito come

$$P_{\text{medio}} = \frac{1}{K} \sum_{m=0}^{K-1} P_{\text{PER}}^{(m)}(f), \quad (5.27)$$

dove il periodogramma è calcolato su una lunghezza di dati $L = N/K$. In questo modo la varianza diminuisce di un fattore $1/K$. In questa operazione però si paga il prezzo di aumentare il *bias*, dato che si utilizzano set di dati corti. Infatti si può fare vedere [43] che il valore medio del periodogramma è dato da

$$\mathcal{E}\{P_{\text{PER}}\} = \int_{-1/2}^{1/2} W_B(f - \nu) P(\nu) d\nu, \quad (5.28)$$

dove P è la PSD del processo e $W_B(f)$ è la trasformata di Fourier della finestra di Bartlett

$$w_B[k] = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{L} & \text{per } |k| \leq L-1 \\ 0 & \text{per } |k| > L \end{cases}, \quad (5.29)$$

cioè

$$W_B(f) = \frac{1}{L} \left(\frac{\sin \pi f L}{\sin \pi f} \right). \quad (5.30)$$

Un valore di L più corto corrisponde ad una finestra di Bartlett (5.29) più stretta e quindi ad un picco principale in $W_B(f)$ più largo. Quindi al diminuire del valore di L diminuisce la risoluzione spettrale giacché non siamo in grado di risolvere dettagli della PSD più piccoli di $1/L$. Non è possibile quindi avere contemporaneamente una varianza piccola ed un bias piccolo; tutto quello che possiamo ottenere è un compromesso fra le due richieste.

5.3 Metodi parametrici

Analizziamo ora i vantaggi dell'impiego dei metodi parametrici per l'analisi spettrale.

L'impiego di una finestra per la stima della PSD significa mettere a zero il valore della funzione di correlazione oltre una certa separazione tra i dati (*lag*) L . Questa è un'approssimazione molto forte, perché non ci permette di utilizzare le informazioni contenute nella funzione di correlazione per separazioni più grandi di L . Nel capitolo 4 in relazione alle simulazioni numeriche per l'analisi in wavelet, abbiamo sottolineato il fatto che per simulare il rumore avevamo usato un modello autoregressivo, anziché stimarlo attraverso una relazione (4.105) in cui il filtro nel dominio delle frequenze per generare il rumore è dato semplicemente dalla radice quadrata dello spettro. Infatti, se si utilizza il filtro $H(f) = \sqrt{S(f)}$ per generare il processo nel dominio del tempo associato allo spettro $S(f)$, occorre avere lunghissime sequenze della funzione $S(f)$ per evitare di avere problemi legati all'aver tagliato la funzione di correlazione quando ancora non era andata a zero.

Per superare questi problemi l'analisi spettrale moderna cerca di identificare il “modello” dinamico del rumore, con il quale possiamo estrapolare la stima della funzione di correlazione anche oltre una certa distanza [43].

La modellizzazione parametrica dello spettro consiste nello scegliere un modello dinamico del rumore, nello stimare i parametri del modello attraverso la funzione di autocorrelazione ed infine nel sostituire tali parametri nella stima teorica della PSD.

In quello che segue ci limiteremo ad analizzare modelli parametrici con funzione di trasferimento razionale

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{B}(z)}{\mathcal{A}(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_Q z^{-Q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P}}, \quad (5.31)$$

dove $z^{-1}x[n] = x[n-1]$. La funzione $\mathcal{H}(z)$ rappresenta la funzione di trasferimento di un processo che viene chiamato autoregressivo a media mobile (ARMA). Esso consiste di un filtro che ha sia poli che zeri. La sequenza $x[n]$ di questi modelli soddisfa

$$x[n] = - \sum_{k=1}^P a_k x[n-k] + \sum_{k=0}^Q b_k w[n-k], \quad (5.32)$$

dove $w[n]$ è un processo stocastico normale bianco.

Un filtro in cui siano presenti solamente poli corrisponde ad un modello autoregressivo (AR), quello con soli zeri ad un processo a media mobile (MA). La condizione di Paley-Wiener (5.19) è sempre soddisfatta da funzioni di densità spettrali che sono polinomi razionali. Quindi la fattorizzazione spettrale di un polinomio razionale è una fattorizzazione in componenti a fase minima (poli e zeri tutti entro il cerchio unitario) o a fase massima (poli e zeri tutti fuori il cerchio unitario). In questo caso possiamo ottenere sempre un filtro a fase minima, perché i poli

e gli zeri che sono al di fuori del cerchio unitario possono essere spostati all'interno del cerchio nei loro valori reciproci, senza modificare la magnitudine del filtro.

I parametri del modello generale ARMA sono collegati alla funzione di autocorrelazione del processo dalle relazioni

$$r_{xx}[k] = \begin{cases} -\sum_{l=1}^P a_l r_{xx}[k-l] + \sigma^2 \sum_{l=0}^{q-k} h^*[l] b[l+k] & \text{per } k = 0, 1, \dots, q \\ -\sum_{l=1}^P a_l r_{xx}[k-l] & \text{per } k \geq q+1 \end{cases} \quad (5.33)$$

dove $h^*[l]$ è la z -trasformata inversa di $\mathcal{H}(1/z^*)$.

Queste relazioni sono non lineari e solo nel modello AR esse si riducono ad un set di equazioni lineari. Questo spiega perché il modello AR è il più popolare tra i modelli parametrici: è facile da implementare e assicura che la funzione di trasferimento ad esso associata sia a fase minima.

5.3.1 Modello autoregressivo (AR)

Dati i parametri a_k di un processo AR di ordine P , possiamo scrivere la densità spettrale del processo come

$$P_{AR}(f) = \frac{\sigma^2}{|1 + \sum_{k=1}^P a_k \exp(-i2\pi kf)|^2}. \quad (5.34)$$

La relazione tra i parametri del modello e la funzione di autocorrelazione $r_{xx}[k]$ per questo modello è data dalle relazioni di *Yule-Walker*

$$r_{xx}[k] = \begin{cases} -\sum_{l=1}^P a_l r_{xx}[k-l] & \text{per } k \geq 1 \\ -\sum_{l=1}^P a_l r_{xx}[-l] + \sigma^2 & \text{per } k = 0. \end{cases} \quad (5.35)$$

Un metodo iterativo per risolvere le equazioni (5.35) e trovare il filtro AR è dato dall'algoritmo di Durbin [47].

È possibile dimostrare che un filtro AR è stabile e causale sfruttando la relazione esistente tra il problema della predizione lineare [43] ed il processo AR, di cui parleremo in dettaglio nel capitolo 6.

L'algoritmo di Durbin L'algoritmo di Durbin si basa sulla strategia di supporre che il filtro ottimale di ordine $p-1$ sia stato precedentemente calcolato e quindi di calcolare il filtro ottimale all'ordine successivo p basandosi su questa assunzione. Questo processo viene utilizzato fino ad ottenere il filtro ottimale all'ordine desiderato, avendo bisogno di inizializzare solo il filtro di ordine uno.

Il metodo di Durbin assume una struttura di Toeplitz per la matrice di correlazione, cioè una matrice in cui tutti gli elementi lungo ogni diagonale siano uguali.

Se il problema richiede la stima della matrice di correlazione direttamente dai dati, allora bisogna prestare attenzione alla scelta dell'estimatore di $r_{xx}[k]$. Il metodo dell'autocorrelazione soddisfa questa richiesta, assicurando la forma di Toeplitz per la matrice \mathbf{r}_{xx} . Esso produce una stima di $r_{xx}[k]$ nel modo seguente

$$\hat{r}_{xx}[k] = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-k-1} x[n]x[n-k], \quad (5.36)$$

dove K è il numero totale di campioni utilizzati nella stima.

Supponiamo che $1 \leq p \leq P$ e che il filtro di ordine $(p-1)$ sia noto; i passi dell'algoritmo di Durbin sono i seguenti

- Inizializzazione all'ordine zero:

$$\epsilon_0 = r_{xx}[0]. \quad (5.37)$$

- Stima dei coefficienti di riflessione o PARCOR² k_p per $1 \leq p \leq P$:

$$k_p = -\frac{1}{\epsilon_{p-1}} \left[r_{xx}[p] + \sum_{j=1}^{p-1} a_j r_{xx}[p-j] \right]. \quad (5.38)$$

e aggiornamento del parametro di ordine p

$$a_p^{(p)} = k_p. \quad (5.39)$$

- Aggiornamento del vettore di ordine $p-1$ per $1 \leq j \leq p-1$:

$$a_j^{(p)} = a_j^{(p-1)} + k_p a_{p-j}^{(p-1)}. \quad (5.40)$$

- Stima dell'errore quadratico medio

$$\epsilon_p = (1 - k_p^2) \epsilon_{p-1}. \quad (5.41)$$

Alla fine della iterazione $p = P$, il filtro lineare predittivo ottimale ovvero il set P dei parametri a_k del modello AR è dato da

$$a_j^{\text{ottimale}} = a_j^{(P)} \quad \text{per} \quad 1 \leq j \leq P, \quad (5.42)$$

$$\sigma = \sqrt{\epsilon_P}. \quad (5.43)$$

²I coefficienti di riflessione k_p sono anche detti PARCOR (*partial correlation*) per via del loro significato statistico. Consideriamo un insieme di variabili random $\{u, w_1, w_2, \dots, w_L, v\}$. Può succedere che u e v siano entrambi correlati con le variabili w e come risultato siano anche correlati tra loro. La correlazione diretta tra le variabili u e v , una volta rimosse le variabili intermedie w è detta correlazione parziale. I coefficienti k_p rappresentano la correlazione parziale tra il dato $x[n]$ ed il dato $x[n-p]$.

5.3.2 Modello a media mobile (MA)

Un modello MA è dato da una serie temporale che soddisfa

$$x[n] = \sum_{k=0}^q b_k w[n-k], \quad (5.44)$$

dove $w[n]$ è la sequenza di ingresso che guida il processo. La PSD di tale modello può essere scritta come

$$P_{\text{MA}}(f) = \sigma^2 |B(f)|^2, \quad (5.45)$$

dove

$$B(f) = 1 + \sum_{k=1}^q b[k] \exp(-i2\pi f k). \quad (5.46)$$

Le relazioni tra i parametri MA e la funzione di autocorrelazione sono

$$r_{xx}[k] = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{l=0}^{q-k} b_l^* b_{l+k} & \text{per } k = 0, 1, \dots, q \\ 0 & \text{per } k \geq q+1 \end{cases}. \quad (5.47)$$

Un processo a media mobile è un processo con memoria finita, poiché assume che la funzione di autocorrelazione è non zero solo fino alle prime q distanze di autocorrelazione.

Possiamo scrivere lo spettro di potenza complesso di un processo MA come un polinomio della forma

$$\mathcal{S}(z) = \sum_{k=-q}^q r_{xx}[k] z^{-k} = \mathcal{B}_q(z) \mathcal{B}_q^*(1/z^*), \quad (5.48)$$

dove

$$\mathcal{B}_q(z) = \sum_{k=0}^q b_q[k] z^{-k}. \quad (5.49)$$

Per trovare il filtro $\mathcal{B}_q(z)$ e quindi i parametri $b_q[k]$ del modello possiamo usare la fattorizzazione spettrale:

$$\mathcal{S}(z) = \sigma_0^2 \mathcal{H}(z) \mathcal{H}^*(1/z^*), \quad (5.50)$$

essendo $\mathcal{H}(z) = \sum_{k=0}^q q(k) z^{-k}$ un filtro a fase minima.

5.3.3 Modello autoregressivo a media mobile (ARMA)

La PSD per un processo ARMA(P,Q) caratterizzato dai parametri $b_Q[k]$ per la parte MA e dai parametri $a_P[k]$ per la parte AR del processo è definita come

$$P_{\text{ARMA}}(f) = \frac{\sigma^2 |1 + b[1]e^{-2i\pi f} + \dots + b[Q]e^{-2i\pi f Q}|^2}{|1 + a[1]e^{-2i\pi f} + \dots + a[P]e^{-2i\pi f P}|^2}. \quad (5.51)$$

Se volessimo trovare i parametri $a_P[k]$ e $b_Q[k]$ con il metodo di massima verosimiglianza dovremmo risolvere un insieme di equazioni non lineari. Tuttavia possiamo trovare una soluzione approssimata nel senso della massima verosimiglianza se facciamo le ipotesi che la lunghezza del campione di dati N sia grande, che i dati siano reali e gaussiani e che i poli e gli zeri non siano troppo vicini al cerchio unitario. Non entriamo nei dettagli di questi estimatori ben descritti in [43].

Noi abbiamo scelto di utilizzare due metodi (MYWE e LSMYWE) basati sulle equazioni modificate di Yule-Walker. Nel metodo MYWE i coefficienti $a_P[k]$ della parte AR si ottengono risolvendo le equazioni

$$\begin{bmatrix} r_{xx}[q] & r_{xx}[q-1] & \cdots & r_{xx}[q-p+1] \\ r_{xx}[q+1] & r_{xx}[q] & \cdots & r_{xx}[q-p+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[q+p-1] & r_{xx}[q+p-2] & \cdots & r_{xx}[q] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \vdots \\ a[p] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{xx}[q+1] \\ r_{xx}[q+2] \\ \vdots \\ r_{xx}[q+p] \end{bmatrix}, \quad (5.52)$$

e calcolando i coefficienti $\{b_Q[0], \dots, b_Q[Q]\}$ della parte MA con tecniche di fattorizzazione spettrale. Infatti, essendo

$$x[n] = \frac{\mathcal{B}_Q(z)}{A_P(z)} w[n], \quad (5.53)$$

dove $\mathcal{B}_Q(z)$ è il filtro per la parte MA e $A_P(z)$ il filtro per la parte AR, possiamo considerare il processo

$$y[n] = \frac{1}{A_P(z)} w[n], \quad (5.54)$$

in modo tale che

$$x[n] = \mathcal{B}_Q(z) y[n]. \quad (5.55)$$

La matrice delle equazioni MYWE è di Toeplitz, ma non è hermitiana, quindi non è garantito che sia semidefinita positiva per cui i coefficienti a_P , in generale, non saranno a fase minima. Le equazioni MYWE possono essere risolte utilizzando un'estensione dell'algoritmo di Levinson-Durbin.

Risolvere il modello ARMA con il metodo MYWE richiede l'utilizzo delle prime $P + Q + 1$ distanze della funzione di autocorrelazione. In questo modo utilizziamo molta meno informazione di quella che possediamo. Possiamo scegliere, quindi, di usare le equazioni ottenute con le prime M distanze della funzione di autocorrelazione, dove $M - Q > P$. Queste equazioni sono le equazioni modificate di Yule-Walker nel senso dei minimi quadrati (LSMYWE) [43]. Tale metodo può essere pensato come l'implementazione del metodo di predizione lineare applicato alla sequenza di dati $\{r_{xx}[Q - P + 1], r_{xx}[Q - P + 2], \dots, r_{xx}[M]\}$.

Sia con il metodo MYWE che con quello LSMYWE è difficile stimare il valore ottimale del numero dei parametri Q e P . Se scegliamo un valore di P troppo alto rispetto al valore "vero",

possiamo avere problemi di stabilità dell'algoritmo, se lo scegliamo troppo piccolo non riusciamo a seguire tutti i picchi presenti nello spettro. Le prestazioni del metodo MYWE dipendono dal tipo di spettro che vogliamo modellizzare. Esso lavora meglio del metodo LSMYWE nel caso di uno spettro regolare, peggio nel caso di uno spettro con linee spettrali.

5.4 Alcuni esempi di modellizzazione parametrica

In questa sezione vogliamo mostrare i risultati ottenuti modellizzando con gli algoritmi descritti alcuni esempi di spettri di rumore. In particolare consideriamo uno spettro a larga banda come il “rumore rosa” ed uno spettro caratterizzato dalla presenza di linee strette come quello generato dai modi di violino dei fili di sospensione delle masse test nell'esperimento VIRGO [44] [45].

5.4.1 Rumore Rosa

Il rumore rosa, caratterizzato dallo spettro di potenza $S(f) \propto \frac{1}{f}$, è presente nella parte a basse frequenze dello spettro di rumore di VIRGO.

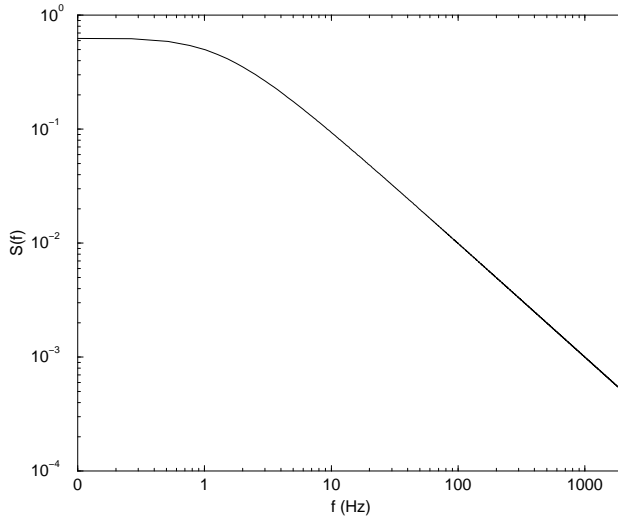


Figura 5.1: Spettro di rumore $1/f$.

Per simulare lo spettro evitando la singolarità in $f = 0$, possiamo considerare il seguente modello per lo spettro $1/f$:

$$S(f) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \int_{f_{min}}^{f_{max}} \frac{1}{f^2 + \nu^2} d\nu = \frac{\phi(f)}{f}, \quad (5.56)$$

dove

$$\phi(f) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \left(\tan^{-1} \frac{f}{f_{min}} - \tan^{-1} \frac{f}{f_{max}} \right). \quad (5.57)$$

In questo modo l'andamento dello spettro è $1/f$ per $f_{min} \ll f \ll f_{max}$, dove $\phi(f) \simeq \sigma^2$. In figura 5.1 riportiamo lo spettro teorico ottenuto con l'equazione (5.56).

Proviamo a modellizzare questo spettro con i modelli parametrici descritti: AR, MA, e ARMA, riportando i risultati nelle figure 5.2 5.3.

I coefficienti ARMA sono stati calcolati in due modi diversi: risolvendo le equazioni MYWE o quelle LSMYWE per trovare i parametri AR, poi trovando i parametri MA per mezzo di un fattorizzazione spettrale.

Possiamo vedere che tutti questi modelli riescono a riprodurre lo spettro, anche se il modello AR funziona meglio del modello MA con lo stesso numero di coefficienti. Il modello ARMA mostra il vantaggio di riprodurre lo spettro con un numero molto piccolo di parametri. È sufficiente usare $Q = 8$ e $P = 8$ per il modello ARMA, invece dei 256 parametri utilizzati dai modelli AR ed MA. Come ci aspettavamo il modello LSMYWE lavora peggio del modello MYWE nel caso di uno spettro senza linee.

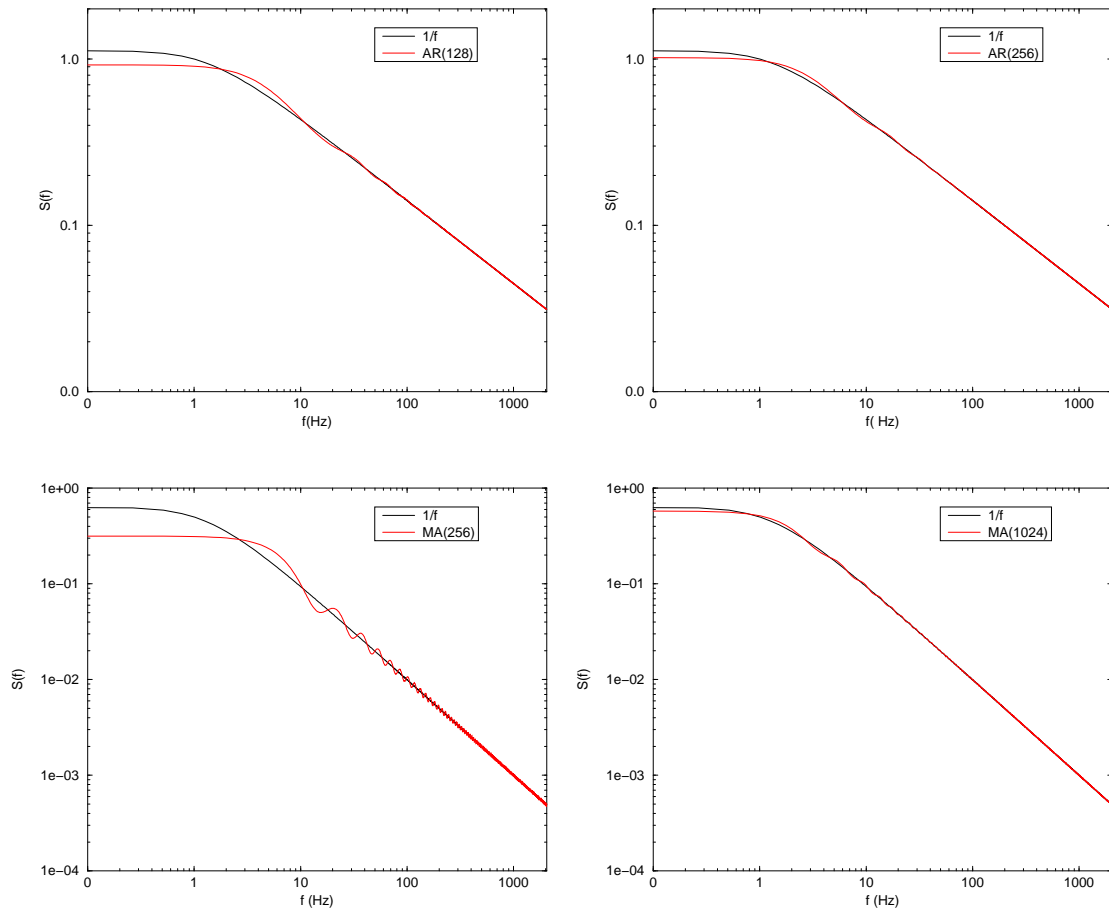


Figura 5.2: Fit per il rumore rosa: In alto AR(128) e AR(256), in centro MA(256) e MA(1024).

5.4.2 Spettro di rumore generato dai modi di violino

Consideriamo, ora, un spettro di rumore caratterizzato da picchi spettrali stretti, come quelli generati dai modi di violino di un filo di sospensione per uno specchio di VIRGO :

$$S(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f/f_0} \frac{\alpha}{(f^2/f_0^2 - n^2)^2 + n^4 \phi^2} . \quad (5.58)$$

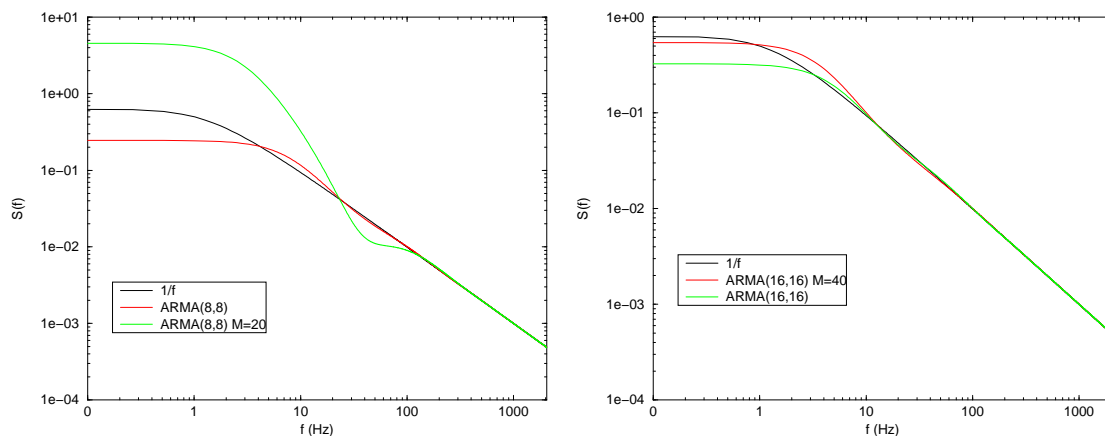


Figura 5.3: Fit per il rumore rosa: a sinistra ARMA(8,8) e a destra ARMA(16,16) rispettivamente con $M = 20$ e $M = 40$ per il metodo LSMYWE.

Scegliamo, per esempio, i modi di violino generati dallo specchio lontano con i dati

$$\alpha = 2.82 \times 10^{-47} \quad f_0 = 308.6 \text{ Hz} \quad \phi^2 = 10^{-7}, \quad (5.59)$$

ottenendo lo spettro in figura 5.4.

Nelle figure 5.5 5.6 riportiamo i risultati ottenuti parametrizzando lo spettro di rumore generato dai modi di violino come modello AR, MA e ARMA. È evidente che i modelli con solo zeri nella funzione di trasferimento hanno difficoltà nel riprodurre le risonanze presenti nello spettro che sono associate ai poli della funzione di trasferimento. Anche con una grande quantità di parametri come nel modello MA(1024) lo spettro originario non è riprodotto. Il modello AR, invece, riproduce le caratteristiche dello spettro iniziale con un numero relativamente piccolo di parametri (vedi il fit AR(128)).

Il modello ARMA mostra le migliori prestazioni perchè con soli (16, 16) coefficienti riesce a seguire lo spettro originario. Per ottenere questo risultato, però dobbiamo pagare il prezzo di risolvere un set di equazioni non lineari oppure di avere solo una soluzione approssimata per le equazioni. Vogliamo sottolineare che in questa situazione, dove lo spettro è caratterizzato da linee spettrali molto strette, il metodo LSMYWE riesce a riprodurre lo spettro, mentre il metodo MYWE fallisce. In figura 5.6 riportiamo i fit ottenuti con modelli ARMA(16,16) e ARMA(32,32) utilizzando sia il metodo MYWE che il metodo LSMYWE con $M = 80$. È evidente che con il metodo MYWE non riusciamo assolutamente a riprodurre lo spettro originario anche aumentando il numero di coefficienti, mentre nel fit in cui abbiamo utilizzato il metodo LSMYWE il modello e lo spettro originario sono praticamente sovrapposti sia con $P = 32$ e $Q = 32$ che con $P = 16$ e $Q = 16$.

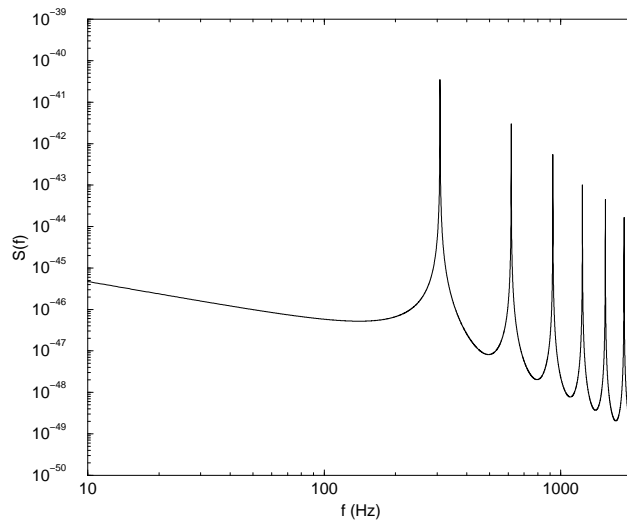


Figura 5.4: Spettro di rumore generato dai modi di violino.

5.5 Modellizzazione dello spettro di rumore di VIRGO

Consideriamo una curva teorica per lo spettro di rumore di VIRGO in cui sono presenti il rumore shot ed il rumore termico del pendolo, degli specchi e dei modi di violino

Abbiamo parametrizzato lo spettro di rumore rendendo lo spettro piatto per frequenze minori

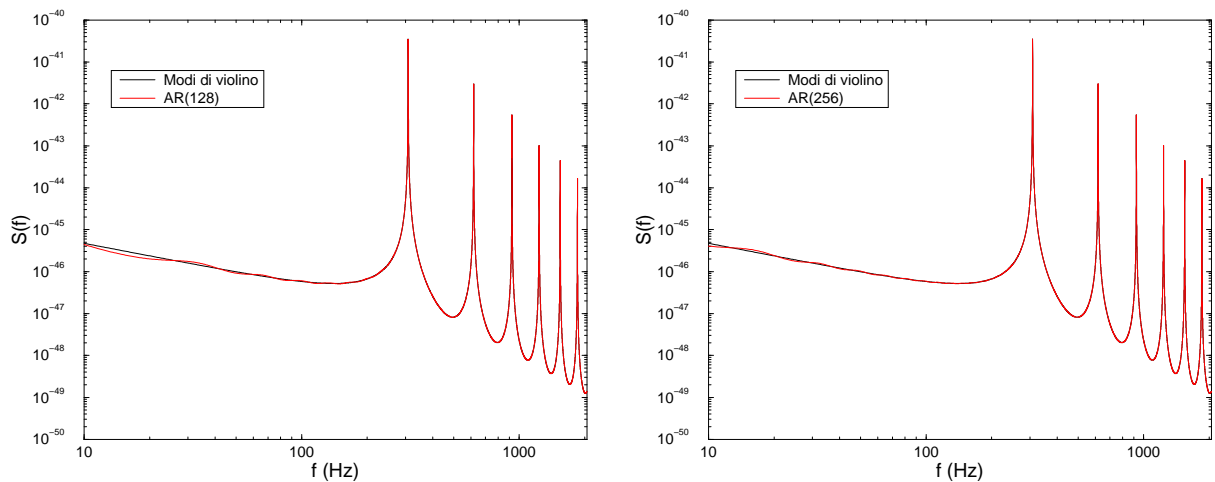


Figura 5.5: Modelli AR per il fit allo spettro di rumore generato dai modi di violino.

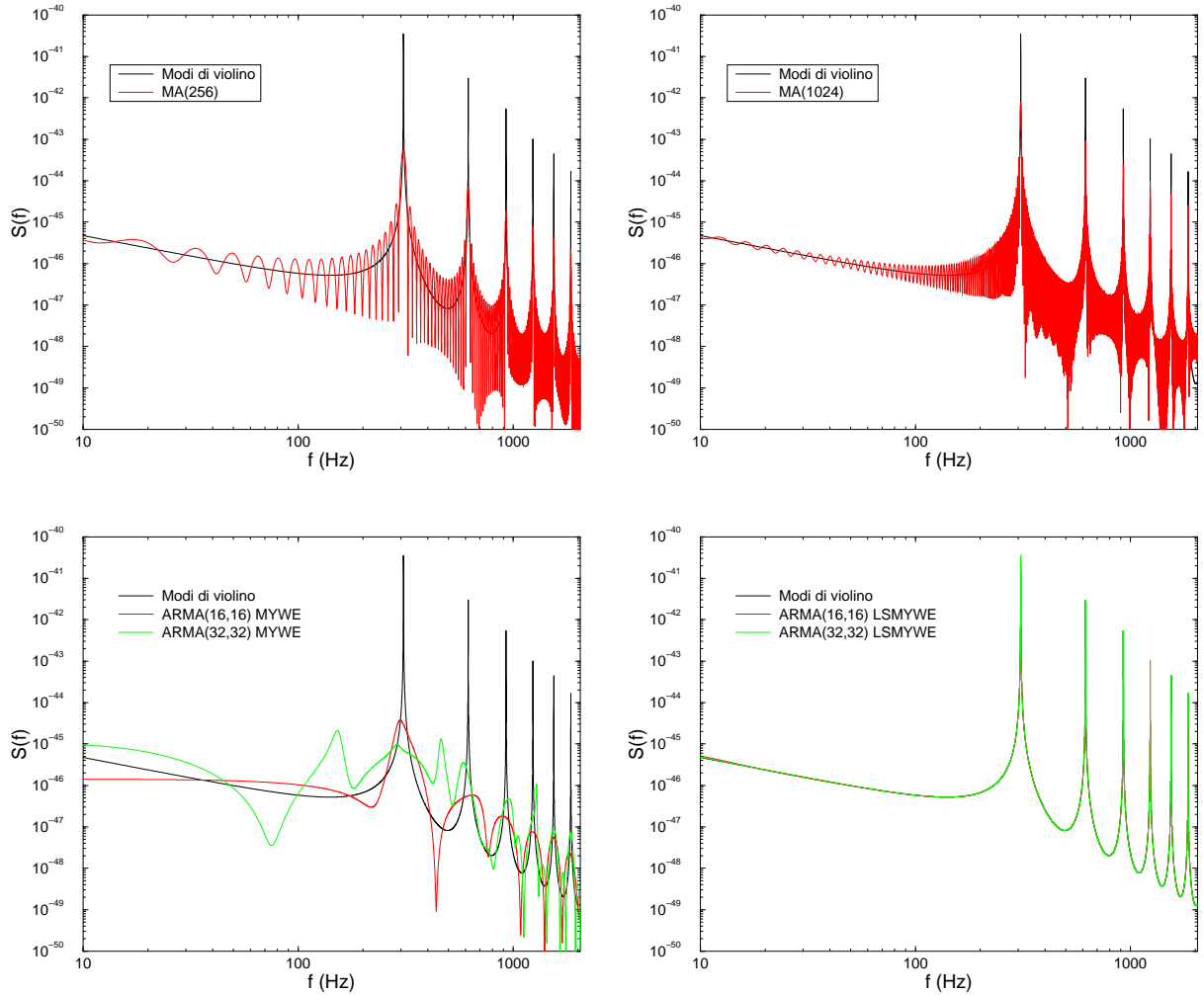


Figura 5.6: Dall'alto: modelli AR, MA e ARMA per il fit allo spettro di rumore generato dai modi di violino.

di una frequenza f_{min} . Come vedremo nel prossimo capitolo occorre effettuare un prefiltraggio del rumore di VIRGO a basse frequenze dove la funzione di correlazione del processo è dominata dal modo di pendolo degli specchi. Quindi

$$S(f) = \begin{cases} \frac{S_1}{f^5} + \frac{S_2}{f} + S_3 \left(1 + \left(\frac{f}{f_K} \right)^2 \right) + S_v(f) & f \geq f_{min} \\ S(f_{min}) & f < f_{min} \end{cases} \quad (5.60)$$

dove i parametri sono stati scelti come in (4.111) e $f_{min} = 10$ Hz.

Riportiamo 5.8 i risultati del fit allo spettro di rumore di VIRGO con i modelli AR, MA e ARMA. Come ci aspettavamo dai risultati della modellizzazione dei modi di violino, i modelli AR e ARMA riproducono bene lo spettro di VIRGO, mentre il modello MA richiede un numero

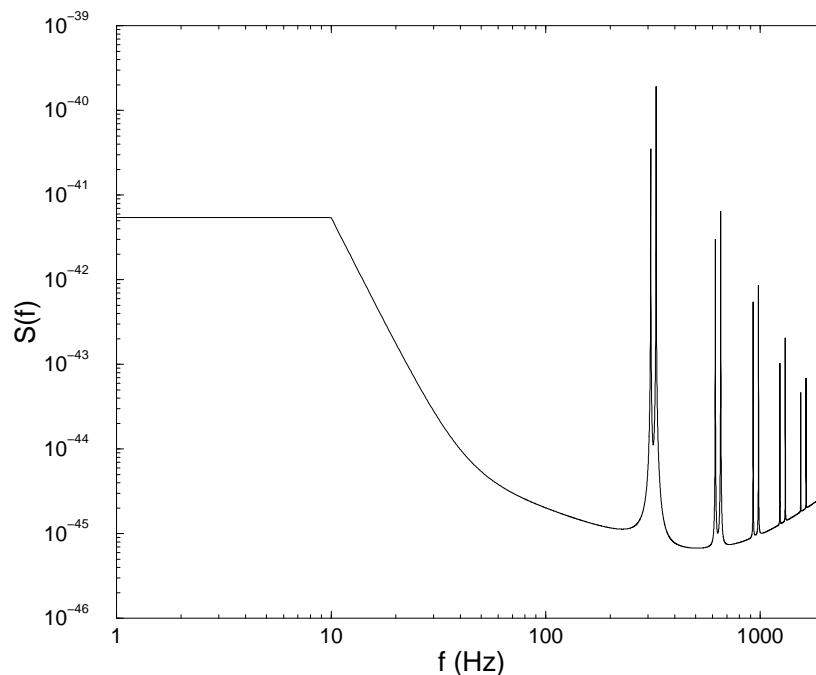


Figura 5.7: Spettro di rumore di VIRGO .

molto alto di parametri anche per seguire in maniera approssimata tale spettro. Anche in questo caso il metodo LSMYWE è più efficiente di quello MYWE per il modello ARMA. Abbiamo provato ad aumentare il numero di parametri per verificare se le prestazioni del metodo MYWE migliorano, ma anche un modello (128, 128) fallisce. In basso in figura 5.8 riportiamo i risultati ottenuti con il metodo LSMYWE per un modello ARMA(32, 32) con $M = 80$ e con un modello ARMA(64, 64) con $M = 150$; è evidente che con $32 + 32$ parametri riusciamo a seguire tutte le caratteristiche dello spettro di rumore di VIRGO .

5.6 Simulazione del rumore nel dominio del tempo

La modellizzazione parametrica di uno spettro teorico è utile anche quando vogliamo simulare i dati del processo nel dominio temporale partendo dalla conoscenza teorica dello spettro. In questo caso occorre seguire i seguenti passi:

- stimare dallo spettro $S(f)$ la funzione di correlazione $r_{xx}[k]$;

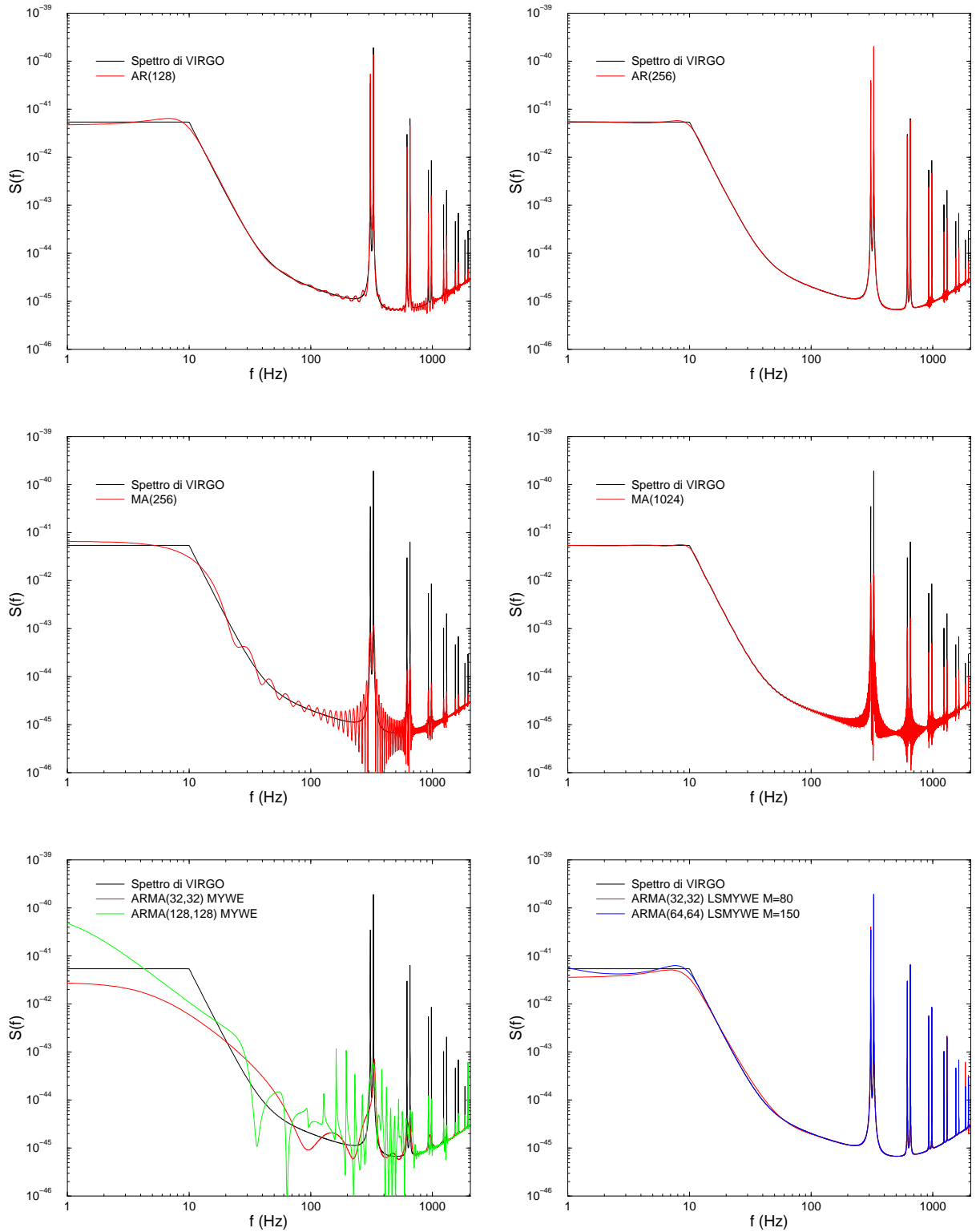


Figura 5.8: Dall'alto: AR fit, MA fit, ARMA fit per lo spettro di rumore di VIRGO

- scegliere un modello parametrico opportuno per modellizzare lo spettro;
- trovare i parametri del modello.

Avendo stimato i parametri del modello, possiamo ottenere una realizzazione del processo nel tempo in maniera semplice. La sequenza nel tempo $x[n]$ è data dalla relazione

$$x[n] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^P a_k x[n-k] + \sum_{k=0}^Q b_k w[n-k] & \text{per un modello ARMA,} \\ \sum_{k=0}^Q b_k w[n-k] & \text{per un modello MA,} \\ -\sum_{k=1}^P a_k x[n-k] + w[n] & \text{per un modello AR.} \end{cases} \quad (5.61)$$

Mostriamo in figura 5.9 lo spettro ottenuto mediando 100 realizzazioni della simulazione nel dominio del tempo del processo con un modello AR(256) per lo spettro di rumore di VIRGO.

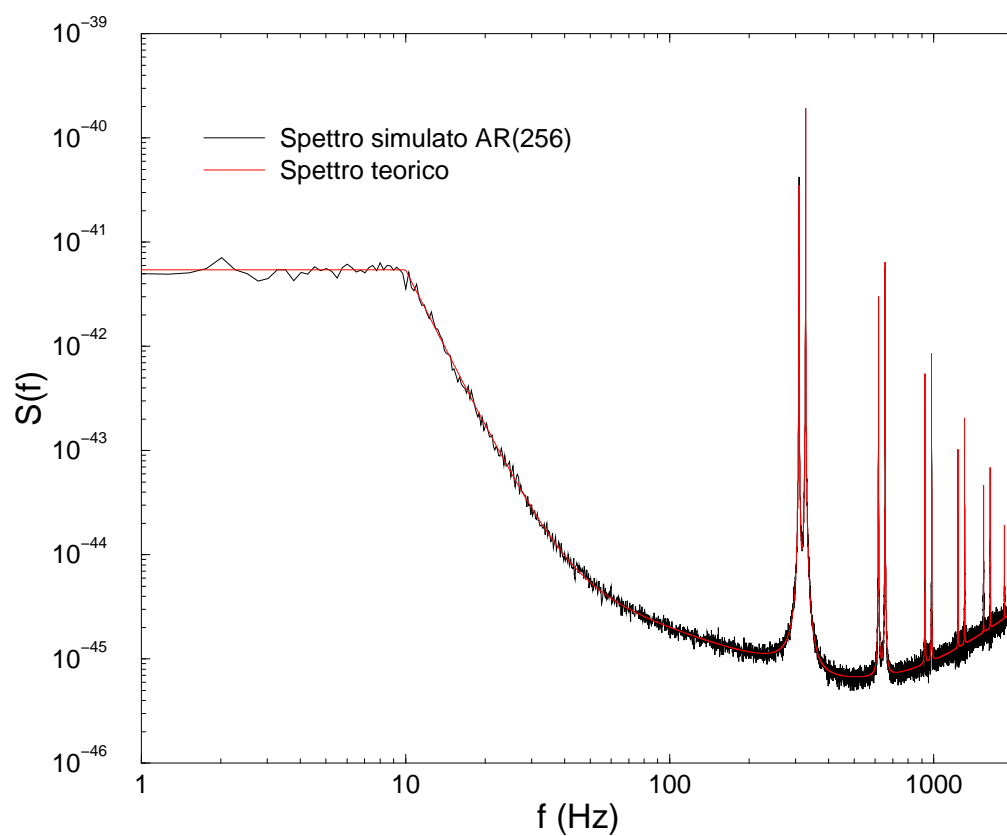


Figura 5.9: Media su 100 simulazioni del processo per uno spettro AR(256).

Capitolo 6

Whitening e filtri a reticolo

Negli algoritmi descritti nel capitolo 4 per la ricerca del segnale gravitazionale sotto le ipotesi di gaussianità e stazionarietà del rumore, abbiamo effettuato l'operazione di *whitening* del rumore utilizzando la conoscenza teorica dello spettro di rumore.

L'operazione di *whitening* è necessaria negli algoritmi di ricerca del segnale perché ci permette di rendere lo spettro di rumore indipendente dalla frequenza e di confrontare i differenti candidati a picchi di segnali a frequenze diverse in modo statisticamente corretto. Pensiamo per esempio all'influenza che potrebbero avere i picchi spettrali dei modi di violino nello spettro di rumore di VIRGO per la ricerca dei segnali gravitazionali.

È evidente che per effettuare tale operazione nell'analisi dei dati sperimentali non è possibile utilizzare la stima teorica dello spettro come abbiamo fatto per esempio nel filtro di Wiener o nell'analisi in wavelet.

La modellizzazione parametrica dello spettro di rumore descritta nel capitolo 5 ci offre la possibilità di costruire un filtro di *whitening* nel dominio dei tempi.

In questo capitolo mostreremo come sia possibile implementare tale filtro per i dati dell'interferometro VIRGO.

6.1 Predizione Lineare

Il problema della predizione lineare consiste nel volere “predirre” il dato $x[n]$ avendo a disposizione, per esempio, p precedenti dati $\{x[n-1], x[n-2], \dots, x[n-p]\}$. Un modo per costruire un filtro che fornisce tale risultato è il filtro lineare in cui la stima $\hat{x}[n]$ del dato n -esimo $x[n]$ è data dalla relazione

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^P w_k x[n-k]. \quad (6.1)$$

Tale modo di implementare un filtro lineare è detto trasversale ed i parametri w_k sono i pesi del filtro.

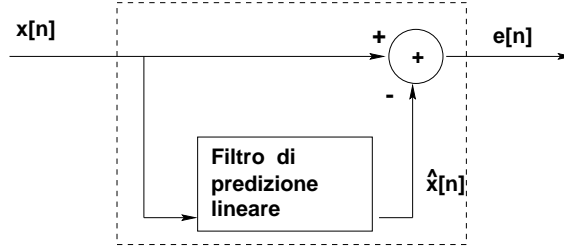


Figura 6.1: Filtro di errore di predizione lineare.

La predizione lineare è utile, per esempio, nel problema della identificazione di un sistema. Supponiamo di voler trovare i parametri di un filtro che ammettiamo agisca linearmente su un segnale in ingresso. Con un filtro di predizione lineare possiamo trovare il filtro “equivalente” che riproduce la stessa uscita.

Costruiamo il filtro come in figura 6.1 che fornisce in uscita l’errore che commettiamo nello stimare $\hat{x}[n]$ con un filtro di predizione lineare, rispetto alla sequenza in ingresso $x[n]$ generata dal sistema che vogliamo identificare. Identificare il sistema significa trovare i parametri w_k del filtro equivalente. Questi parametri possono essere cercati minimizzando la funzione errore

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n]. \quad (6.2)$$

In genere si costruisce una funzione costo di errore e minimizzandola si ottiene il vettore ottimale dei pesi. Se si sceglie come funzione costo l’errore quadratico medio $\epsilon = \mathcal{E}[e[n]^2]$, il set di equazioni che dobbiamo risolvere per ottenere il vettore \mathbf{w} è dato dalle equazioni Normali

$$\epsilon_{\min} = r_{xx}[0] - \sum_{k=1}^P w_k r_{xx}[-k], \quad (6.3)$$

dove $r_{xx}[k]$ è la funzione di autocorrelazione dei dati $x[n]$.

Se il sistema è stazionario i parametri w_k sono indipendenti dal valore di n .

6.1.1 Modello AR e predizione lineare

Nel capitolo 5 abbiamo introdotto il modello autoregressivo, con il quale abbiamo modellizzato un processo stocastico stazionario come l’uscita di un filtro lineare il cui ingresso è un rumore bianco gaussiano.

In figura 6.2 riportiamo una rappresentazione grafica del filtro AR che nel dominio temporale può essere scritto come

$$x[n] = - \sum_{k=1}^P a_k x[n-k] + w[n]. \quad (6.4)$$

I parametri a_k del filtro sono stimati attraverso le equazioni di Yule-Walker (5.35). Vogliamo fare vedere che il problema della predizione lineare e quello della modellizzazione AR conducono alle stesse equazioni. Nel problema della predizione lineare i pesi ottimali w_k vengono trovati minimizzando l'errore quadratico medio. Questa operazione produce le equazioni Normali (6.3). Tali equazioni sono identiche alle equazioni di Yule-Walker in cui $\epsilon_{\min} = \sigma^2$ e $w_k = -a_k$. La relazione tra predizione lineare e modello AR è evidente anche nella relazione (6.4) nel dominio temporale del modello AR. Infatti la quantità $-\sum_{k=1}^P a_k x[n-k]$ costituisce una stima del valore $x[n]$, mentre la quantità $w[n] = x[n] - \hat{x}[n]$ è l'errore $e[n]$. Esso rappresenta la parte del segnale imprevedibile, nel senso che quando abbiamo estratto tutte le informazioni presenti nella sequenza $x[n]$ per stimare i parametri w_k , l'errore $e[n]$ rappresenterà un processo delta correlato come lo è il rumore bianco $w[n]$ del filtro AR. Una volta minimizzato l'errore $\epsilon = \mathcal{E}[e^2[n]]$ non saremo più in grado di estrarre informazioni dal segnale per predire il valore $x[n]$ utilizzando i p dati precedenti.

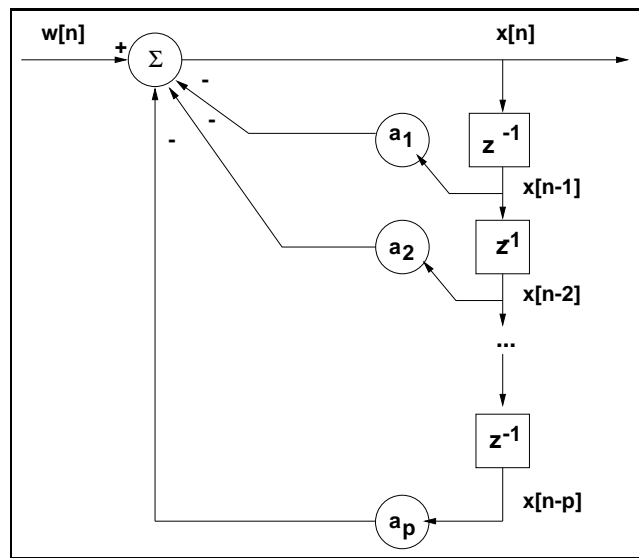


Figura 6.2: Filtro AR.

Tali argomenti risultano più chiari se si pensa che i parametri a_k di un processo AR possono anche essere considerati come i coefficienti che massimizzano l'entropia spettrale o che massimizzano la “piattezza” spettrale [43]. Nel primo caso avere massima entropia spettrale significa non poter estrarre più alcuna informazione dal segnale $x[n]$; nel secondo caso ottenere uno spettro il più piatto possibile vuole dire che se si filtra il segnale $x[n]$ attraverso l'inverso del filtro AR, che abbiamo costruito per modellizzare il processo, l'uscita sarà un processo gaussiano bianco.

Noi, in particolare, siamo interessati proprio a questa ultima caratteristica dei processi AR. Quello che vogliamo riuscire a costruire è un filtro al cui ingresso vi è un processo random stazionario e gaussiano con una funzione di autocorrelazione $r_{xx}[k]$ e alla cui uscita è presente un processo random delta correlato.

Se costruiamo un filtro come in figura 6.1 in cui i coefficienti del filtro di predizione lineare sono i coefficienti a_k del modello AR con cui abbiamo modellizzato il processo $x[n]$, allora otteniamo il filtro cercato.

In figura 6.2 è chiara anche l'azione del filtro AR. Guardiamo la figura 6.2 da sinistra verso destra: all'ingresso del filtro vi è rumore bianco, all'uscita vi è il processo $x[n]$ che abbiamo "colorato" con i parametri del modello AR. Guardiamo la figura 6.2 da destra verso sinistra: in ingresso abbiamo il processo AR $x[n]$ in uscita un processo bianco $w[n]$; il filtro visto in questo modo è un filtro di *whitening*.

6.2 Predizione lineare e struttura a reticolo

Nella sezione precedente abbiamo introdotto il filtro di predizione lineare trasversale, ora vogliamo mostrare come l'algoritmo di Durbin, introdotto nel capitolo 5 per trovare i coefficienti a_k di un modello AR, conduca in maniera naturale ad una struttura a reticolo per tale filtro. Nell'implementazione dell'algoritmo di Durbin stimiamo i coefficienti di riflessione k_p ad ogni ordine p del filtro e con la stima dell'ultimo coefficiente di riflessione k_p aggiorniamo i valori dei parametri $a_p^{(p-1)}$ corrispondenti al filtro precedente.

In questa sezione mostreremo come i coefficienti di riflessione k_p vengono usati per costruire un filtro di *whitening* con la struttura a reticolo.

Supponiamo di avere un processo stocastico gaussiano e stazionario $x[n]$ che abbiamo modellizzato come un processo autoregressivo di ordine P .

Definiamo l'errore *forward* (FPE) per il filtro di ordine P nel modo seguente

$$e_P^f[n] = x[n] + \sum_{k=1}^P a_k^{(P)} x[n-k], \quad (6.5)$$

dove i coefficienti a_k sono i coefficienti del modello AR per il processo $x[n]$. L'errore FPE rappresenta l'uscita del nostro filtro.

Possiamo scrivere la trasformata *zeta* del filtro FPE per ogni stadio p del filtro di ordine P come

$$FPE(z) = F_p^f[z]X[z] = \left(1 + \sum_{j=1}^p a_j^{(p)} z^{-j}\right) X[z]. \quad (6.6)$$

Ricordiamo che nell'algoritmo di Durbin ad ogni stadio p i coefficienti a_p vengono aggiornati secondo la relazione

$$a_j^{(p)} = a_j^{(p-1)} + k_p a_{p-j}^{(p-1)} \quad 1 \leq j \leq p-1. \quad (6.7)$$

Sostituiamo tale relazione nella trasformata del filtro $F_p^f[z]$

$$F_p^f[z] = F_{p-1}^f[z] + k_p \left[z^{-p} + \sum_{j=1}^{p-1} a_{p-j}^{(p-1)} z^{-j} \right]. \quad (6.8)$$

A questo punto si introduce in maniera naturale l'errore di predizione *backward* BPE

$$F_{p-1}^b[z] = z^{-(p-1)} + \sum_{j=1}^{p-1} a_{p-j}^{(p-1)} z^{-(j-1)}. \quad (6.9)$$

Per comprendere il significato di $F_p^b[z]$ vediamo la sua azione nel dominio dei tempi

$$F_{p-1}^b[z]x[n] = e_{p-1}^b[n] = x[n-p+1] + \sum_{j=1}^{p-1} a_{p-j}^{(p-1)} x[n-j+1], \quad (6.10)$$

quindi $e_{p-1}^b[n]$ è l'errore che si commette nel “predirre” in maniera *backward* il dato $x[n-p+1]$ utilizzando i $p-1$ dati $\{x[n], x[n-1], \dots, x[n-p+2]\}$.

Possiamo quindi riscrivere l'eq. (6.8) utilizzando $F_{p-1}^b[z]$. Sostituiamo tale relazione nella trasformata del filtro $F_p^f[z]$

$$F_p^f[z] = F_{p-1}^f[z] + k_p F_{p-1}^b[z]. \quad (6.11)$$

Quindi per conoscere il filtro FPE allo stadio p dobbiamo conoscere il filtro BPE allo stadio $p-1$.

Anche per l'errore *backward* possiamo scrivere una analoga relazione

$$F_p^b[z] = z^{-1} F_{p-1}^b[z] + k_p F_{p-1}^f[z]. \quad (6.12)$$

Le equazioni (6.11) (6.12) costituiscono il nostro filtro a reticolo che nel dominio dei tempi si può scrivere

$$e_p^f[n] = e_{p-1}^f[n] + k_p e_{p-1}^b[n-1], \quad (6.13)$$

$$e_p^b[n] = e_{p-1}^b[n-1] + k_p e_{p-1}^f[n]. \quad (6.14)$$

In figura 6.3 è illustrato come la struttura a reticolo viene utilizzata per stimare gli errori forward e backward.

Utilizzando una struttura a reticolo possiamo implementare il filtro di *whitening* seguendo i passi:

- stima dei valori della funzione di autocorrelazione $\hat{r}_{xx}[k]$, $0 \leq k \leq P$ del nostro processo $x[n]$;
- uso dell'algoritmo di Durbin per trovare i coefficienti di riflessione k_p , $1 \leq p \leq P$;

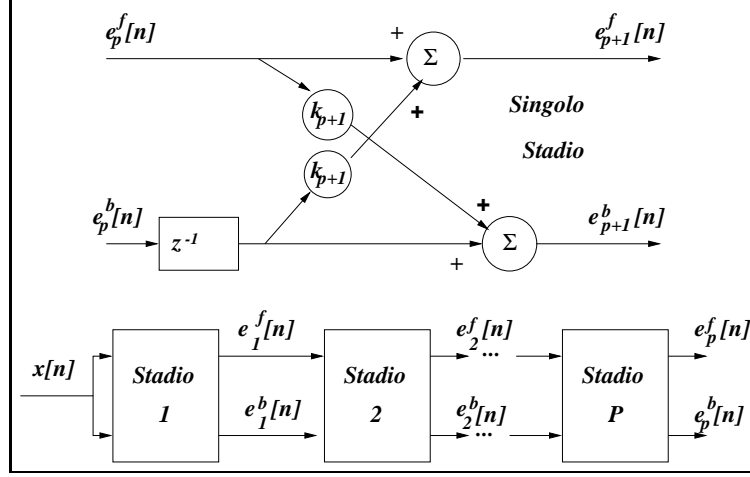


Figura 6.3: Singolo stadio del filtro di predizione lineare a reticolo e filtro di predizione lineare a reticolo di ordine P .

- implementazione del filtro a reticolo con i coefficienti di riflessione k_p iniziando il filtro $e_0^f[n] = e_0^b[n] = x[n]$.

Utilizzato in questo modo, l'errore forward allo stadio P -esimo è equivalente all'errore forward di un filtro trasversale e rappresenta l'uscita del nostro filtro di *whitening*.

6.3 *Whitening* per lo spettro di rumore di VIRGO

A questo punto possiamo porci il problema di rendere lo spettro di rumore di VIRGO bianco costruendo un opportuno filtro di *whitening*. Nel capitolo 5 abbiamo modellizzato lo spettro di rumore di VIRGO utilizzando modelli parametrici AR, MA e ARMA. In particolare abbiamo utilizzato modelli autoregressivi di ordine 128 o 256 verificando che lo spettro venisse riprodotto in tutte le sue caratteristiche.

L'ordine di un modello, però, deve essere scelto secondo criteri ben precisi. Se vogliamo costruire il filtro di *whitening* corretto dobbiamo innanzitutto trovare l'ordine “vero” del modello AR per lo spettro di rumore di VIRGO.

Nel capitolo 5 abbiamo parametrizzato lo spettro di rumore di VIRGO imponendo che avesse un valore costante per frequenze < 10 Hz. Tale operazione è stata effettuata come semplificazione di un processo di prefiltraggio dello spettro necessario per tagliare la coda della funzione di correlazione dovuta al modo di pendolo delle masse test.

A questo punto è necessario effettuare l'operazione di prefiltraggio corretta per stimare un

ordine realistico del processo AR con il quale modelleremo i dati del rumore di VIRGO una volta filtrati.

6.3.1 Prefiltraggio dello spettro di rumore di VIRGO

Nell'esperimento VIRGO una operazione preliminare di filtraggio dei dati verrà effettuata direttamente in maniera analogica. Tale operazione permetterà di diminuire il range dinamico dei dati e di conseguenza di ridurre i problemi legati alla quantizzazione del dato nel passaggio dall'analogico al digitale.

Noi abbiamo effettuato l'operazione di prefiltraggio direttamente sullo spettro teorico, utilizzando un filtro passa alto del secondo ordine con potenza di densità spettrale data [48]:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon_{pass}^2 \left(\frac{\cot(\omega/2)}{\cot(\omega_{pass}/2)} \right)^{2N}} \quad (6.15)$$

in cui i parametri hanno i seguenti valori

$$\epsilon_{pass} = 1000, \quad N = 2, \quad \omega_{pass} = 3\pi. \quad (6.16)$$

Tale filtro può essere implementato nel dominio dei tempi utilizzando una trasformazione bilineare come descritto in appendice D.

In figura 6.4 riportiamo lo spettro teorico di rumore di VIRGO prima e dopo il filtraggio. È evidente che abbiamo prestato attenzione a non mandare a zero alcuna parte dello spettro, perché la condizione di Paley-Wiener (cfr. (5.19)) fosse soddisfatta. La parametrizzazione dello spettro è la stessa utilizzata nei capitoli precedenti.

In figura 6.5 mostriamo la funzione di risposta all'impulso per lo spettro di VIRGO prima e dopo l'operazione preliminare di filtraggio. Possiamo osservare che la funzione di risposta all'impulso per lo spettro teorico senza prefiltraggio ha una correlazione che si annulla a tempi molto più lunghi di 64 sec mentre quella ottenuta dopo l'operazione di filtraggio a basse frequenze si annulla dopo 16 sec.

Come vedremo nel capitolo 7 questo comportamento è molto importante quando si voglia applicare algoritmi adattivi con tempi di apprendimento brevi.

Una volta filtrato lo spettro teorico dobbiamo scegliere l'ordine del modello AR con il quale costruire il filtro di *whitening*.

6.3.2 Selezione dell'ordine del modello AR

In genere non conosciamo quale è l'ordine del modello AR con il quale vogliamo modellizzare il nostro processo, ammesso che il nostro processo sia un processo autoregressivo.

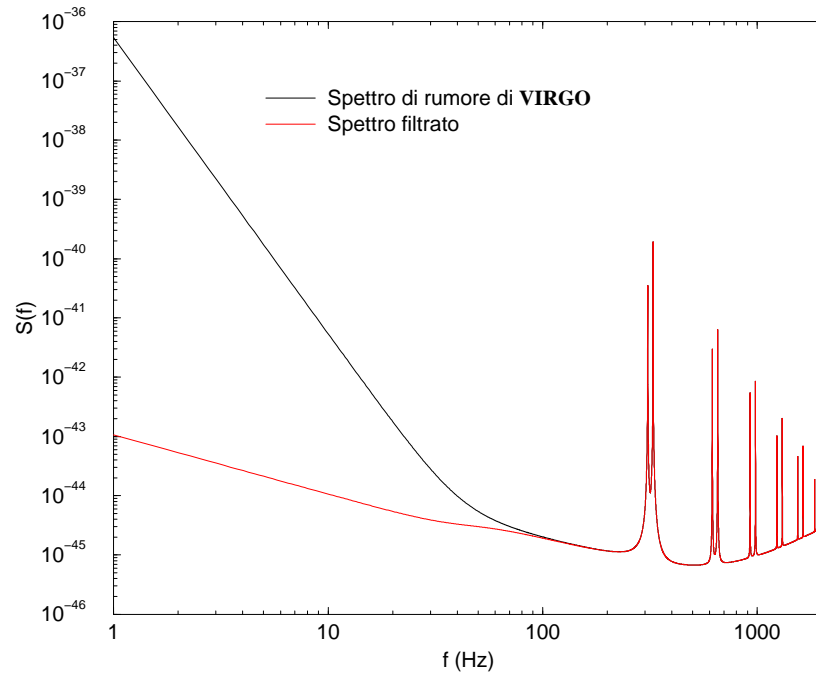


Figura 6.4: Spettro di rumore di VIRGO prima del filtraggio e spettro ottenuto con un filtraggio passa alto.

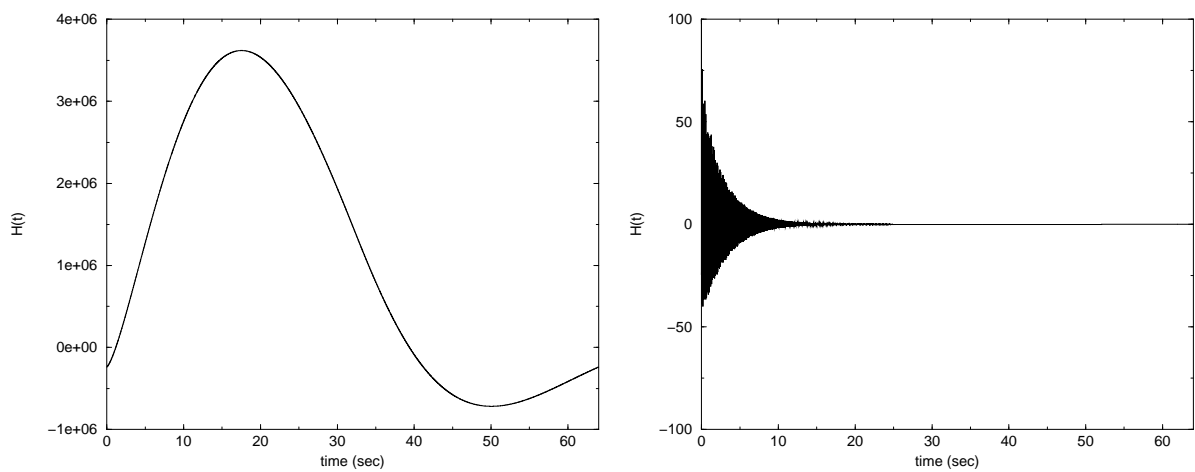


Figura 6.5: Funzione di risposta all'impulso per lo spettro di VIRGO prima e dopo l'operazione di filtraggio.

Supponiamo che il processo sia un processo AR di ordine P . Se utilizziamo per il modello un ordine $p < P$ lo spettro risultante sarà più “liscio” di quello originario. Se invece scegliamo un ordine $p > P$ possono nascere picchi spuri nello spettro.

Se il processo non è un processo AR, inoltre, il numero di parametri necessari per modellizzarlo sarà infinito. Occorre dunque fissare un criterio che ci permetta di selezionare l’ordine “vero” del processo.

In letteratura esistono alcuni metodi standard per ottenere tale risultato che si basano sul criterio di trovare il numero P per il quale l’errore quadratico medio di predizione risulta minimo.

Tuttavia l’errore quadratico medio è una funzione monotonicamente non crescente dell’ordine P del modello e quindi una funzione solo di $\sigma^2(P) = \mathcal{E}[e^2[n]]$ (indichiamo l’errore quadratico medio con σ^2 anziché ϵ) non può essere utile come criterio per la ricerca di un minimo. Sappiamo, però, che la varianza dello spettro può aumentare quando il numero di parametri diventa troppo grande. Nei criteri di selezione quindi viene introdotta una funzione crescente con l’ordine P che tenga conto dell’andamento della varianza dello spettro rispetto a P . Il valore di P che minimizza la somma delle due funzioni può costituire un indicatore dell’ordine vero del processo AR.

Per trovare l’ordine ottimale per il modello AR dello spettro di rumore di VIRGO abbiamo utilizzato [49] il criterio di informazione di Akaike (AIC), il criterio dell’errore di predizione finale (FPE) ed il criterio di descrizione a lunghezza minima (MDL):

$$\text{AIC}(P) = N \log \sigma^2(P) + 2P, \quad (6.17)$$

$$\text{FPE}(P) = \sigma^2(P) \frac{N + P + 1}{N - P - 1}, \quad (6.18)$$

$$\text{MDL}(P) = N \log \sigma^2(P) + P \log N, \quad (6.19)$$

dove $\sigma^2(P)$ è l’errore quadratico medio all’ordine P e N è il numero di dati.

È stato osservato [50] che i criteri AIC e FPE tendono a dare un valore troppo basso dell’ordine del modello AR se il numero dei dati N è piccolo, mentre se N è grande tendono a sovrastimare P . Il criterio MDL, invece, è un modello consistente perché tende all’ordine vero quando il numero di dati N aumenta.

Per la ricerca dell’ordine del modello AR sono stati applicati i criteri AIC, FPE e MDL ad una sequenza di rumore lunga $N = 262144$ e con un ordine massimo $P = 1024$.

In figura 6.6 riportiamo l’andamento dei criteri di selezione dell’ordine rispetto al valore di P , normalizzati in modo tale che tutti tendano a $\log \sigma^2(P)$ quando $N \rightarrow \infty$.

Il criterio MDL è quello che trova il minimo per il valore più basso dell’ordine P . In par-

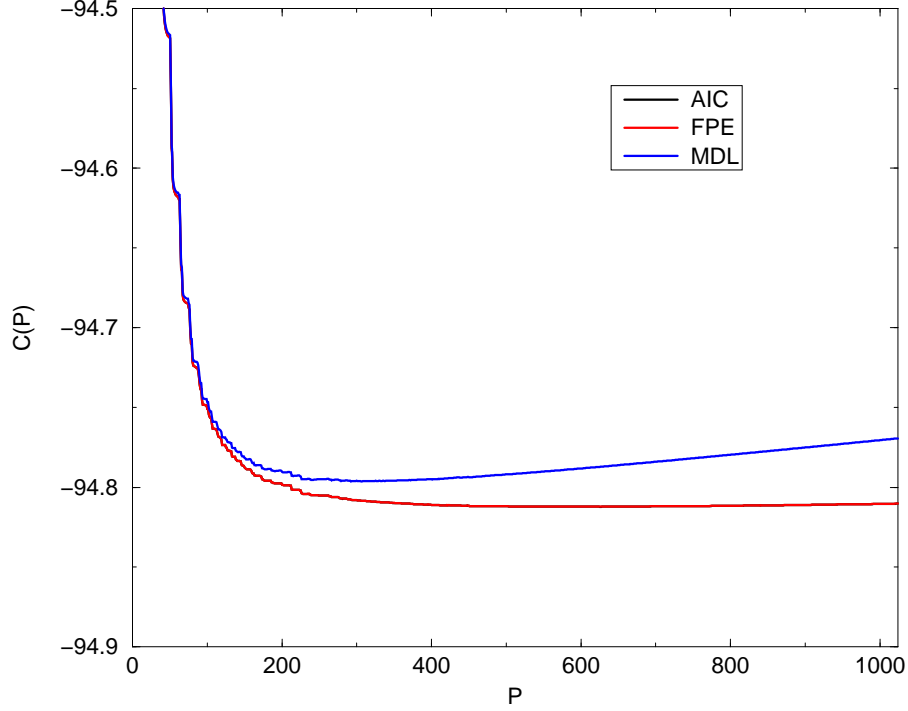


Figura 6.6: Criteri per la selezione dell'ordine del modello AR

ticolare l'ordine selezionato con questo criterio per modellare lo spettro di rumore di VIRGO è $P = 292$.

Per verificare la consistenza del risultato ottenuto con il criterio MDL abbiamo effettuato un altro test. Sappiamo dal criterio di Cramer-Rao (vedi appendice C) che la varianza dei coefficienti di riflessione k_p deve soddisfare alle relazioni

$$var(k_n) = \begin{cases} \frac{1}{N}(1 - k_n^2) & \text{for } n \leq P, \\ \frac{1}{N} & \text{for } n > P. \end{cases} \quad (6.20)$$

In figura 6.7 riportiamo la stima di tale limite per i coefficienti di riflessione del modello AR(1024).

È evidente che per $P \simeq 292$ le relazioni (6.20) risultano soddisfatte, ossia la varianza dei coefficienti di riflessione ha già raggiunto il limite $1/N$.

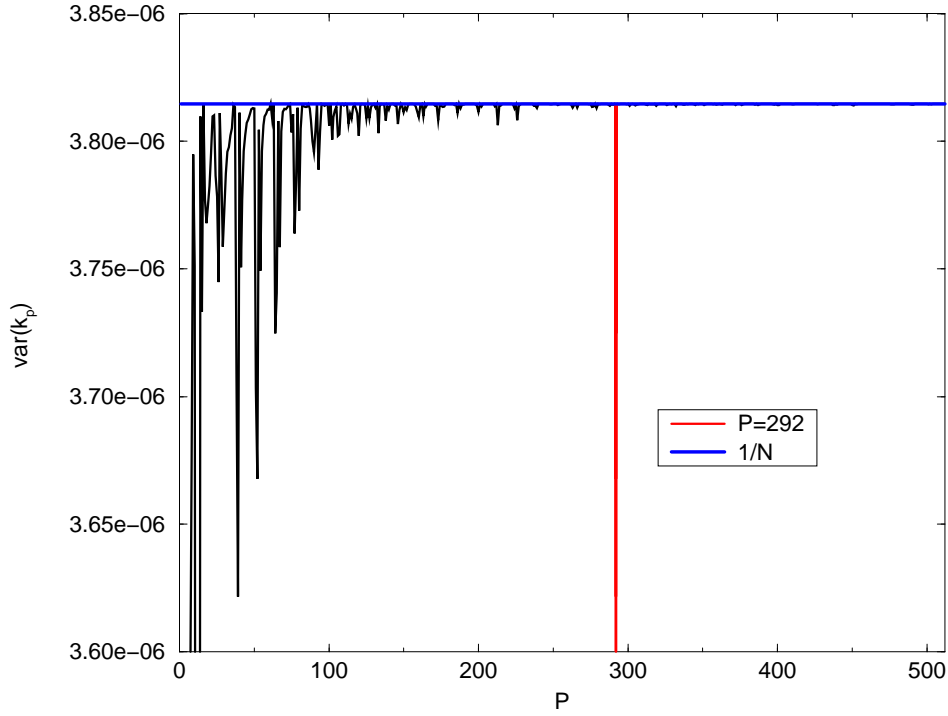


Figura 6.7: Limite di Cramer-Rao per coefficienti di riflessione

In figura 6.8 riportiamo la stima dei coefficienti di riflessione k_p : nel grafico è riportato il valore di k_p all'ordine p corrispondente.

Si può notare come l'ampiezza dei coefficienti di riflessione diminuisca con l'aumentare dell'ordine. Quindi l'influenza dei coefficienti di riflessione e di conseguenza dei coefficienti del modello AR (cfr. (6.7)) agli ordini più alti sullo spettro di rumore sarà decrescente con il crescere dell'ordine P .

Per chiarire tale affermazione verifichiamo quanta informazione spettrale viene recuperata se si aumenta l'ordine P del modello AR.

A tale scopo definiamo l'energia spettrale contenuta in un intervallo di frequenze Δf come

$$E_p(\Delta f) = \int_{f_l}^{f_m} S_{AR(p)}(f) df, \quad (6.21)$$

dove $S_{AR(p)}(f)$ è lo spettro stimato come modello AR di ordine p dello spettro di rumore di VIRGO e dove $f_m - f_l$ è l'intervallo di frequenze sul quale integriamo lo spettro.

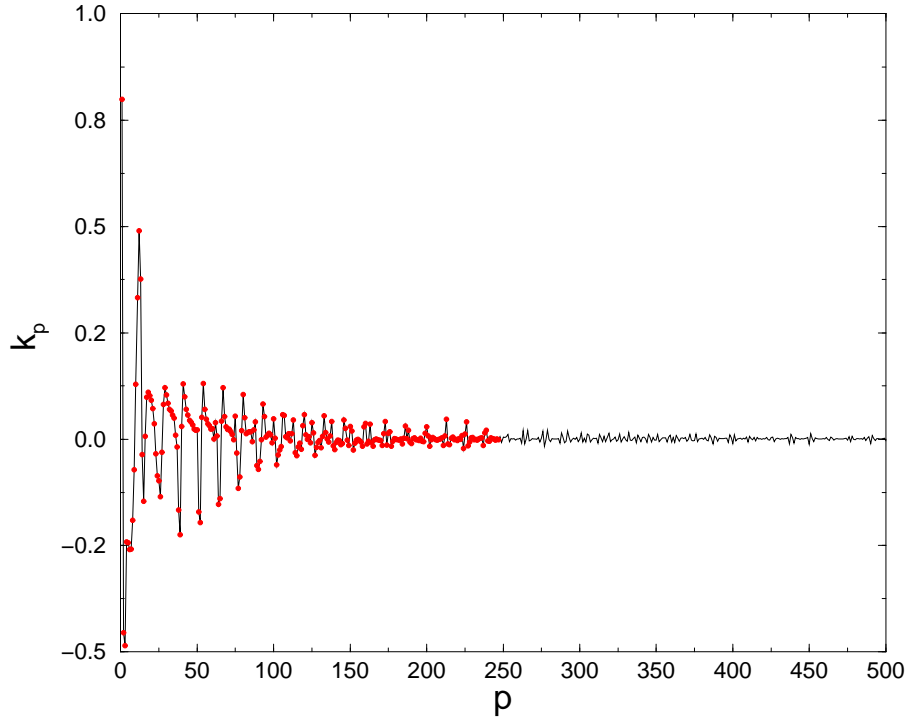


Figura 6.8: Coefficienti di riflessione per un modello AR(292) dello spettro di rumore di VIRGO.

In figura 6.9 riportiamo il risultato ottenuto costruendo la funzione $E_p(\Delta f)$ per ordini p crescenti ad intervalli regolari $p = 32, 64, \dots, 320$ e per intervallo di frequenza $\Delta f = f_l - f_m = 32$ Hz spazzando la banda di frequenze $32 - 2048$ Hz.

In figura 6.9 riportiamo anche la stessa quantità stimata per la curva teorica dello spettro di VIRGO per verificare a quale ordine del modello AR si riesca a recuperare tutta l'energia presente nell'intervallo Δf corrispondente allo stesso intervallo di frequenze per lo spettro teorico.

I risultati mostrano che già per un ordine $P = 128$ la quantità $E_p(\Delta f)$ stimata per lo spettro del modello AR si sovrappone alla curva $E(\Delta f)$ stimata per lo spettro teorico.

Quindi per il valore $P = 292$ dell'ordine selezionato con il criterio MDL la curva $E_p(\Delta f)$ ha sicuramente recuperato tutta l'energia spettrale presente negli intervalli $\Delta f = 32$ Hz dello spettro di rumore di VIRGO.

Decidiamo quindi di scegliere un modello AR(292) per modellizzare lo spettro di rumore di

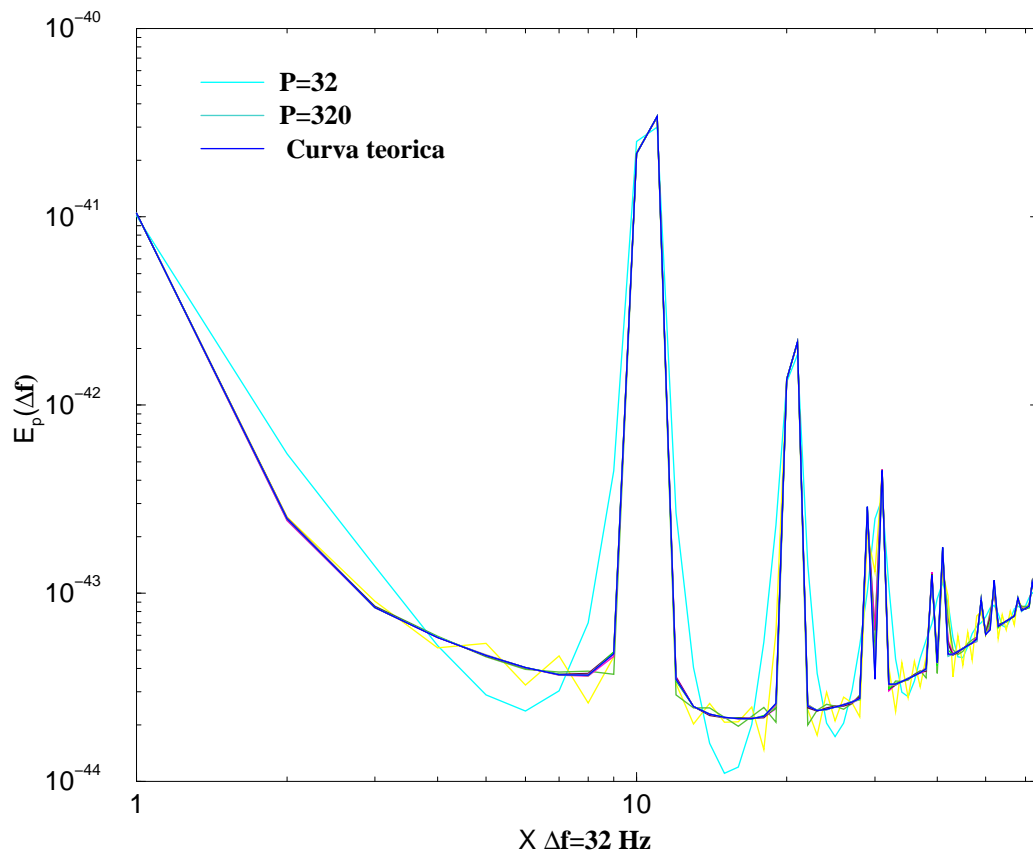


Figura 6.9: Energia spettrale per intervallo di frequenza $\Delta f = 32$ Hz valori dell'ordine P crescente.

VIRGO e di costruire un filtro di *whitening* di ordine $P = 292$.

In figura 6.10 riportiamo lo spettro di rumore di VIRGO filtrato ed il modello ottenuto con un AR(292): tutte le caratteristiche spettrali dello spettro teorico sono riprodotte dal modello AR(292).

Fissato l'ordine del modello AR, possiamo dunque costruire un filtro di *whitening* con struttura a reticolo come in figura 6.3 in cui vengono utilizzati i coefficienti di riflessione k_p stimati con l'algoritmo di Durbin.

L'ingresso di tale filtro è costituito da una realizzazione temporale $x[n]$ del rumore utilizzando la modellizzazione AR(292); l'uscita è l'errore *forward* $e_{P=292}^f(n)$.

In figura 6.11 riportiamo lo spettro medio del segnale in ingresso e lo spettro medio del segnale in uscita ottenuti mediando 100 realizzazioni di rumore $x[n]$ con il modello AR selezionato. È evidente che il filtro di *whitening* è riuscito ad rendere bianca la potenza spettrale del rumore di VIRGO.

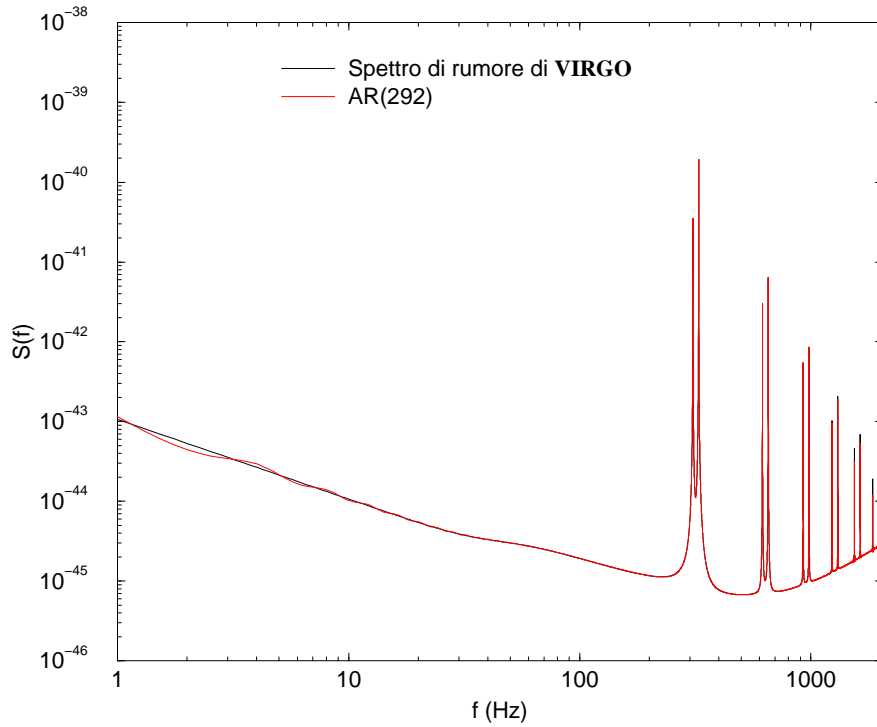


Figura 6.10: Spettro di rumore di VIRGO e modello AR(292).

Occorre osservare che il modello AR per costruzione riproduce la funzione di correlazione $r_{xx}[k]$ fino all'ordine P estrapolandone il valore per gli ordini successivi. In particolare quindi l'area sottesa dalla potenza spettrale, ossia la funzione di correlazione $r_{xx}[0]$ a distanza zero, sarà conservata nel modello AR e anche nel filtro inverso che utilizza i parametri AR. Questo risulta evidente in figura 6.11 dove lo spettro in uscita dal filtro di *whitening* conserva la normalizzazione $r_{xx}[0]$ come ampiezza dello spettro.

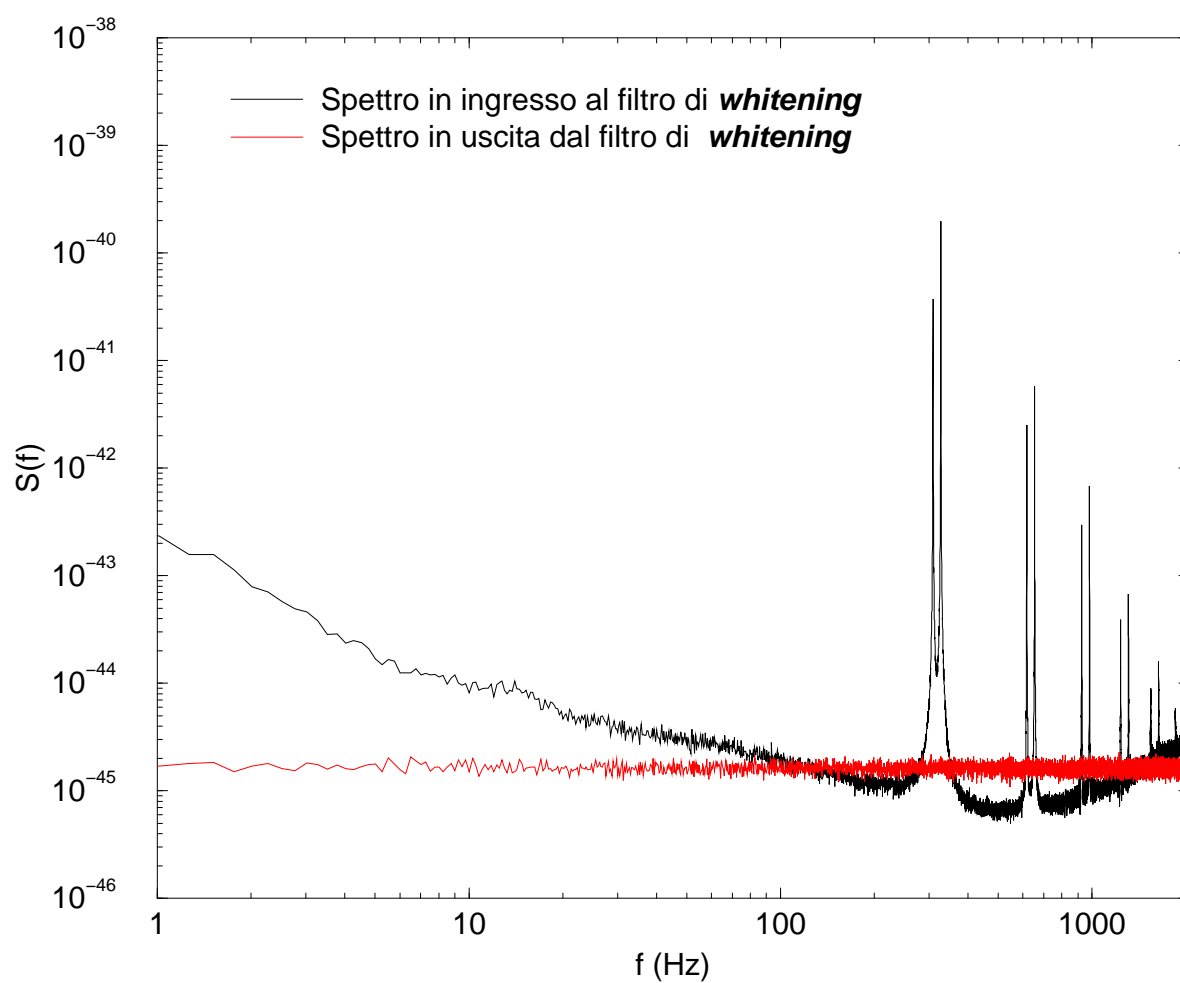


Figura 6.11: Potenza spettrale in ingresso ed uscita di un filtro a reticolo di *whitening*.

Perché i metodi adattivi ?

Nello studio del rumore dell'interferometro VIRGO abbiamo fatto le ipotesi che il rumore sia *gaussiano* e *stazionario*. Questo ci ha permesso di utilizzare lo spettro per identificare il rumore dell'apparato. Tali ipotesi sono in realtà abbastanza restrittive: esse escludono la presenza di non linearità nel rumore che potrebbero modificare il processo gaussiano in un processo con distribuzione di probabilità diversa¹ ed escludono che le caratteristiche statistiche del rumore possano variare nel tempo.

L'analisi dei dati prodotti negli esperimenti di barre risonanti [51] e nell'interferometro test di 40-metri del progetto americano LIGO [52] [53] mostra invece la presenza sia di non linearità che di non stazionarietà del rumore.

Per la preparazione dell'analisi dei dati dell'esperimento VIRGO bisogna quindi essere in grado di affrontare questi problemi e sviluppare algoritmi che ci permettano di analizzare sequenze di dati in cui le ipotesi di gaussianità e stazionarietà non siano verificate.

Un rumore può essere considerato *quasi-gaussiano* o *quasi-stazionario* se rimane gaussiano e stazionario durante il tempo di osservazione.

In questo lavoro ci siamo concentrati sul problema di analizzare i dati in presenza di non stazionarietà del rumore, tenendo ferma l'ipotesi di *quasi-gaussianità*.

Le non stazionarietà a cui ci riferiamo possono per esempio essere causate dalla variazione di temperatura dovuta all'alternarsi del giorno e della notte e che quindi può modulare il segnale di rumore su tempi dell'ora. La presenza di non stazionarietà nel rumore rende la stima spettrale difficile se utilizziamo i metodi classici per i quali occorre avere sequenze di dati prese su tempi molto lunghi per ottenere una buona stima dello spettro. Quindi anche non stazionarietà osservabili su scale dei tempi dell'ordine dell'ora possono causare problemi nell'analisi dei dati.

L'impiego delle tecniche parametriche e dei **metodi adattivi** può aiutarci nel risolvere i problemi legati anche a non stazionarietà osservabili su tempi dell'ordine della decina di minuti.

I metodi adattivi sono stati impiegati efficientemente in molte branche dell'analisi dei segnali per esempio nelle telecomunicazioni, nell'identificazione di sistemi e nella rivelazione dei segnali [54] [55] [47].

¹Ricordiamo che sotto trasformazioni lineari un processo gaussiano rimane gaussiano

Con metodo adattivo intendiamo un metodo in grado di indentificare un sistema, di costruire un filtro *on-line* o di rivelare un segnale senza avere alcuna informazione a priori del processo sotto analisi, un metodo in grado cioè di estrarre le informazioni direttamente dalla sequenza temporale del processo.

È evidente dunque l'importanza di tali metodi quando dobbiamo analizzare dati non stazionari: possiamo costruirci per esempio un filtro di *whitening* in linea che si adatta alle variazioni del rumore.

In questo senso parliamo di identificazione adattiva dello spettro di rumore di VIRGO: utilizzando opportuni algoritmi possiamo essere capaci di estrarre i parametri con i quali modellizzare lo spettro di rumore in intervalli di tempo tali da permetterci l'inseguimento in linea delle variazioni dello spettro di rumore.

La modellizzazione parametrica del rumore che abbiamo fatto nei capitoli precedenti è un utile strumento per realizzare tale scopo. Identificare lo spettro di rumore con un certo numero di parametri permette di costruire un filtro adattivo che *impari* tali parametri direttamente dai dati di rumore.

La stima adattiva dei parametri direttamente dalla sequenza dei dati offre anche il vantaggio di evitare la propagazione degli errori dalla stima della funzione di correlazione, necessaria per implementare l'algoritmo di Durbin, alla stima dei parametri.

Inoltre l'utilizzo degli algoritmi adattivi è di fondamentale importanza se vogliamo effettuare un'analisi in linea dei dati. Infatti anche supponendo che i dati siano stazionari, per poter stimare i P parametri del modello AR dello spettro di rumore occorre seguire i passi seguenti:

1. prendere i dati per un certo periodo T ;
2. stimare la funzione di correlazione $r_{xx}[k]$ fino ad una distanza P ;
3. risolvere le equazioni di Yule-Walker per trovare i parametri a_k ;
4. stimare la potenza spettrale $P_{AR}(f)$.

Queste operazioni necessitano di un tempo tale per cui non è possibile implementarle in linea. Se vogliamo invece effettuare un'analisi in tempo reale dobbiamo essere in grado di stimare i parametri a_k direttamente dai dati in uscita dall'interferometro avendo una stima dello spettro di rumore in linea con l'acquisizione dei dati.

In questo lavoro ci siamo limitati all'analisi di algoritmi adattivi lineari nel senso che l'uscita dell'algoritmo è una combinazione lineare dei dati in ingresso e nel prossimo capitolo mostremo i risultati ottenuti.

In particolare data la natura del problema che vogliamo risolvere, ossia la ricerca dei coefficienti di riflessione k_p con i quali costruire un filtro di *whitening* per lo spettro di rumore di

VIRGO , abbiamo analizzato le prestazioni di filtri adattivi con struttura a reticolo che, come abbiamo visto, è la struttura naturale per l'implementazione dell'algoritmo di Durbin per la stima dei coefficienti di riflessione del modello AR.

Capitolo 7

Identificazione adattiva dello spettro di rumore di VIRGO

L'implementazione di un filtro adattivo segue due passi: il filtraggio dei dati in ingresso e l'adattamento dei parametri del filtro con il quale processare i dati all'iterazione successiva.

I parametri del filtro vengono adattati secondo un criterio di minimizzazione di una funzione costo. Il modo in cui costruiamo tale funzione costo caratterizza la classificazione dei metodi adattivi in

- metodi del gradiente stocastico;
- metodi dei minimi quadrati.

Nella prima classe rientrano gli algoritmi in cui la funzione costo è l'errore quadratico medio $\mathcal{E}[e^2[n]]$, dove $e[n]$ è la differenza tra la funzione che vogliamo trovare e l'uscita del nostro filtro. Parliamo di metodi stocastici perché la funzione costo è una misura statistica dell'errore.

Nella seconda classe la funzione costo è data da una somma pesata degli errori quadratici $e^2[n]$. Questi metodi si possono implementare con una stima a blocchi o con una stima ricorsiva RLS (*Recursive Least Squares*). Nel primo tipo di implementazione rientrano gli algoritmi per i quali prima si acquisisce un blocco di dati e poi si effettua la stima dei minimi quadrati. Nel secondo tipo il metodo dei minimi quadrati viene implementato in modo ricorsivo. È evidente che solo utilizzando algoritmi della seconda classe di metodi possiamo pensare ad una implementazione in linea dell'algoritmo adattivo *Least Squares*.

Per la stima adattiva dello spettro di rumore di VIRGO, abbiamo utilizzato sia il metodo del gradiente stocastico nella sua versione a reticolo GAL (*Gradient Adaptive Lattice*) che i metodi dei minimi quadrati RLS (*Recursive Least Squares*) e nella struttura a reticolo LSL (*Least Squares Lattice*).

Per verificare le prestazioni degli algoritmi adattivi abbiamo seguito i seguenti passi:

- prefiltraggio dello spettro di rumore teorico di VIRGO a basse frequenze (vedi sezione 6.3.1) producendo il nuovo spettro teorico:

$$S'(f) = |H(f)|^2 S(f); \quad (7.1)$$

- modellizzazione del rumore come processo autoregressivo $AR(292)$ in cui la funzione di correlazione è ottenuta grazie al teorema di Wiener–Khinchine dallo spettro di rumore teorico $S'(f)$

$$r_{xx}[n] = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} S'(f) e^{i2\pi f T_s n} df; \quad (7.2)$$

- simulazione del processo di rumore nel dominio del tempo con la formula autoregressiva

$$x[n] = - \sum_{k=1}^P a_k x[n-k] + w[n]; \quad (7.3)$$

- implementazione dell'algoritmo adattivo senza alcuna informazione a priori in ingresso sui dati simulati;
- confronto tra lo spettro simulato e lo spettro ottenuto con in parametri a_k stimati dall'algoritmo adattivo.

È importante verificare inoltre i tempi di convergenza dell'algoritmo adattivo per confrontarli con i tempi tipici delle non stazionarietà. A tal fine intendiamo quantificare il numero di iterazioni necessarie affinché i valori dei parametri AR o dei coefficienti di riflessione k_p convergano ai valori “veri”, dove per valore vero intendiamo la stima ottenuta con l'algoritmo di Durbin.

7.1 Metodi del gradiente

Abbiamo definito nel capitolo 7 la funzione errore $e[n]$ per il filtro di predizione lineare come

$$e[n] = \left[\hat{x}[n] - \sum_{j=1}^P w_P[j] x[n-j] \right]. \quad (7.4)$$

Più genericamente scriviamo

$$e[n] = \left[d[n] - \sum_{j=1}^P w_P[j] x[n-j] \right], \quad (7.5)$$

essendo $d[n]$ il segnale che vogliamo identificare o predire e $w_P[j]$ i pesi del filtro. La funzione costo $\epsilon = \mathcal{E}[e^2[n]]$ per il metodo del gradiente stocastico quindi è una funzione del secondo

ordine nei pesi \mathbf{w} . Essa definisce un paraboloide nello spazio (\mathbf{w}, ϵ) detta superficie dell'errore quadratico medio (MSE):

$$\begin{aligned}\epsilon[\mathbf{w}] &= \mathcal{E} \left[d[n] - \sum_{j=1}^P w_P[j] x[n-j] \right]^2 \\ &= \sigma_d^2 - 2\mathbf{p}^T \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w},\end{aligned}\quad (7.6)$$

essendo $\sigma_d^2 = \mathcal{E}[d^2[n]]$ l'autocorrelazione del segnale cercato a distanza zero e $\mathbf{p} = \mathcal{E}[d[n]\mathbf{x}[n]]$ la funzione di correlazione incrociata tra il vettore dei dati ed il segnale cercato.

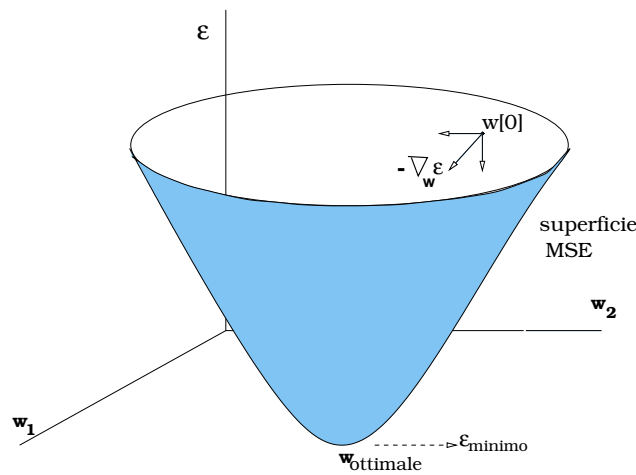


Figura 7.1: Superficie dell'errore quadratico medio

In figura 7.1 abbiamo riprodotto la superficie MSE per uno spazio di due parametri \mathbf{w} . Il vettore ottimale dei pesi $\mathbf{w}_{\text{ottimale}}$ corrisponde al minimo della superficie (7.6) e si ottiene risolvendo le equazioni di Wiener-Hopf

$$\mathbf{R} \mathbf{w}_{\text{ottimale}} = \mathbf{p}, \quad (7.7)$$

dette anche equazioni Normali (6.3) perché si possono derivare dalla **condizione di ortogonalità** [47]

$$\mathcal{E}[e[n]x[n-k]] = 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (7.8)$$

essendo N il numero totale dei dati. La condizione di ortogonalità è una semplice conseguenza del fatto che il minimo della funzione costo si ottiene mettendo a zero la derivata prima nei pesi di $\mathcal{E}[e^2[n]]$.

Anche se possiamo risolvere le equazioni di Wiener-Hopf in modo analitico, dal punto di vista computazionale non sarebbe una procedura ottimale perché richiederebbe l'inversione della

matrice \mathbf{R} di ordine $P \times P$. Bisogna cercare un modo iterativo di risolvere tali equazioni che ci permetta l'implementazione in tempo reale della ricerca del vettore ottimale dei pesi.

Per raggiungere il minimo della superficie, partendo da un vettore dei pesi $\mathbf{w}[0]$ su un punto qualsiasi della superficie MSE corrispondente ad un valore $\epsilon[0]$, come mostriamo in figura 7.1, dobbiamo muoverci verso la direzione opposta al vettore gradiente $\nabla_{\mathbf{w}}[\epsilon] = \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{w}}$

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] - \mu \nabla_{\mathbf{w}}[\epsilon], \quad (7.9)$$

dove μ è una costante da scegliere opportunamente perché si abbia convergenza in tempi brevi. Tale modo di raggiungere il minimo è detto metodo della discesa più ripida (*method of steepest descent*).

Tuttavia possiamo non avere accesso alla statistica del secondo ordine del processo e quindi la relazione (7.9) può risultare inapplicabile. Nei metodi del gradiente stocastico si utilizza un'approssimazione della relazione (7.9) in cui al posto dell'errore quadratico medio si impiega l'errore quadratico istantaneo:

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] - \mu \nabla_{\mathbf{w}} e^2[n]. \quad (7.10)$$

Tale approssimazione del metodo della discesa più ripida è il metodo del minimo quadrato medio LMS (*Least Mean Squares*) proposto da Widrow [55]. Tale metodo introduce il concetto di adattivo perché la soluzione ottimale dei parametri \mathbf{w} viene cercata adattando i parametri ad ogni iterazione ed utilizzando solo il segnale in ingresso senza alcuna conoscenza a priori della funzione di correlazione del segnale.

Lo schema per il metodo LMS è il seguente

- costruzione dell'uscita del filtro $\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^P w[k]x[n-k]$;
- stima dell'errore istantaneo $e[n] = d[n] - \hat{x}[n]$;
- adattamento dei parametri $\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + \alpha e[n]\mathbf{x}$, dove $\mathbf{x} = x[n-k]$ per $1 \leq k \leq P$ e $\alpha = 2\mu$.

7.1.1 GAL

Nell'algoritmo GAL implementiamo in maniera adattiva il filtro con struttura a reticolo descritto nel capitolo 6 dalle relazioni

$$e_p^f[n] = e_{p-1}^f[n] + k_p e_{p-1}^b[n-1], \quad (7.11)$$

$$e_p^b[n] = e_{p-1}^b[n-1] + k_p e_{p-1}^f[n]. \quad (7.12)$$

Le relazioni precedenti definiscono due funzioni di errore. Il modo naturale per definire una funzione costo ad ogni stadio p del nostro filtro a reticolo è l'errore quadratico medio $\sigma_p[n]$ ottenuto come media della somma in quadratura degli errori $e_p^f[n]$ e $e_p^b[n]$

$$\sigma_p[n] = \mathcal{E} \left[(e_p^f[n])^2 + (e_p^b[n])^2 \right] . \quad (7.13)$$

Il gradiente della funzione costo è quindi dato da

$$\nabla \sigma_p[n] = 2\mathcal{E} \left[e_p^f[n]e_{p-1}^b[n-1] + e_p^b[n]e_{p-1}^f[n] \right] , \quad (7.14)$$

che nello spirito del metodo LMS possiamo sostituire con il valore istantaneo

$$\nabla \sigma_p[n] \simeq 2 \left[e_p^f[n]e_{p-1}^b[n-1] + e_p^b[n]e_{p-1}^f[n] \right] . \quad (7.15)$$

Nel filtro a reticolo di predizione lineare i pesi da adattare sono i coefficienti di riflessione e per analogia con l'eq. (7.10) possiamo scrivere la relazione ricorsiva minimizzando il valore istantaneo di $\sigma_p[n]$ rispetto a k_p

$$k_p[n+1] = k_p[n] - \mu \nabla_{k_p} \sigma_p[n] . \quad (7.16)$$

Se calcoliamo il gradiente dell'errore di predizione totale abbiamo

$$k_p[n+1] = k_p[n] + \beta [e_p^f[n]e_{p-1}^b[n-1] + e_p^b[n]e_{p-1}^f[n]] , \quad (7.17)$$

dove $\beta = 2\mu$ è una costante di guadagno.

Quindi per ogni iterazione n i coefficienti di riflessione vengono adattati ad ogni stadio p del reticolo.

Per avere una maggiore stabilità nella convergenza si utilizza in genere l'algoritmo del gradiente normalizzato in cui al posto della costante di guadagno β si utilizza un parametro per ciascuno stadio p adattato anche esso ad ogni iterazione n

$$\beta_p[n] = \frac{1}{d_p[n]} , \quad (7.18)$$

in cui

$$d_p[n] = [1 - \alpha]d_p[n-1] + [e_p^f[n]]^2 + [e_p^b[n]]^2 , \quad (7.19)$$

essendo $\alpha \ll 1$. Dall'equazione (7.19) risulta un valore più basso di $d_p[n]$ se l'errore di predizione è piccolo e quindi un guadagno $\beta_p[n]$ più alto nella relazione di adattamento. Quindi i dati in ingresso che producono un valore più piccolo dell'errore vengono pesati in misura maggiore nell'adattamento.

7.1.2 Risultati per lo spettro di rumore di VIRGO

Il filtro a reticolo adattivo GAL è stato implementato su simulazioni del rumore di VIRGO per verificare la sua capacità di identificarne in linea lo spettro.

Nelle simulazioni abbiamo utilizzato circa 4 minuti di dati scegliendo una frequenza di campionamento di 4096 Hz.

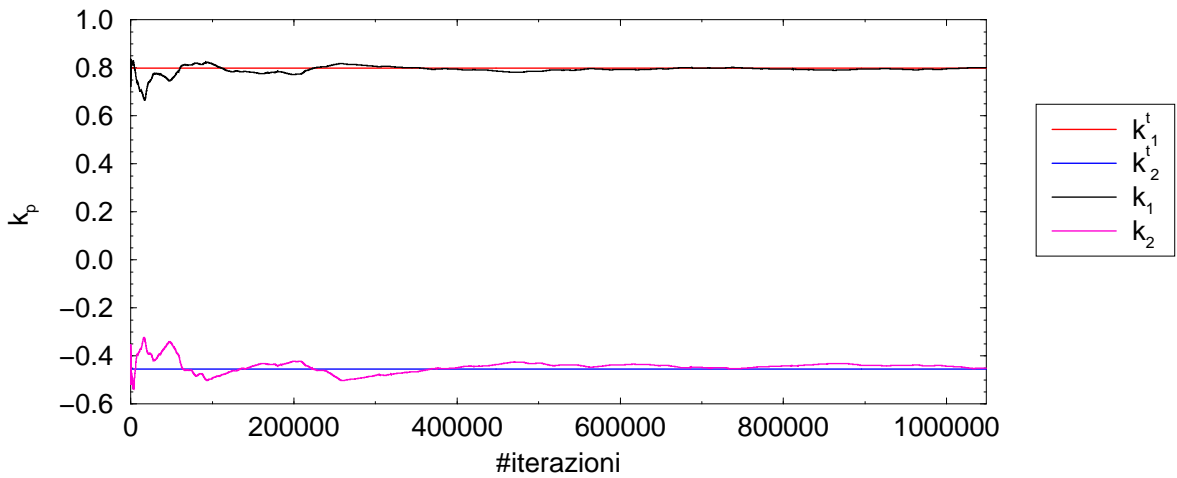


Figura 7.2: Convergenza dei coefficienti di riflessione al valore vero dopo 4 minuti di dati.

In figura 7.2 riportiamo l'andamento con il numero di iterazioni della stima dei primi due coefficienti di riflessione k_1 e k_2 stimati il filtro GAL con un valore del parametro $\alpha = 1.0 \times 10^{-7}$ e per riferimento i corrispondenti valori veri k_1^t e k_2^t .

Osservando il risultato di figura 7.2 potremmo dedurre che l'algoritmo converge al valore vero dei parametri k_p in un tempo ragionevolmente breve, dell'ordine di 2 minuti di iterazioni.

Tuttavia il risultato riportato in figura 7.2 non è vero per tutti i coefficienti di riflessione. Osserviamo infatti in figura 7.3 la stima dei 292 coefficienti di riflessione e il loro corrispondente valore teorico. Per una migliore comprensione abbiamo ingrandito le zone corrispondenti a $p = 1, 2, \dots, 50$ e $p = 50, 51, \dots, 100$. Si può osservare che mentre i primi 50 coefficienti k_p stimati con l'algoritmo GAL si sovrappongono al corrispondente valore vero, i coefficienti k_p per $p > 50$ cominciano ad avere una deviazione osservabile dal valore vero.

Questo si riproduce in una cattiva stima dei parametri a_p del modello AR. Infatti i parametri a_p vengono stimati secondo la relazione:

$$a_j^{(p)}[n] = a_j^{(p-1)}[n] + k_p[n]a_{p-j}^{(p-1)}[n] \quad 1 \leq j \leq p-1. \quad (7.20)$$

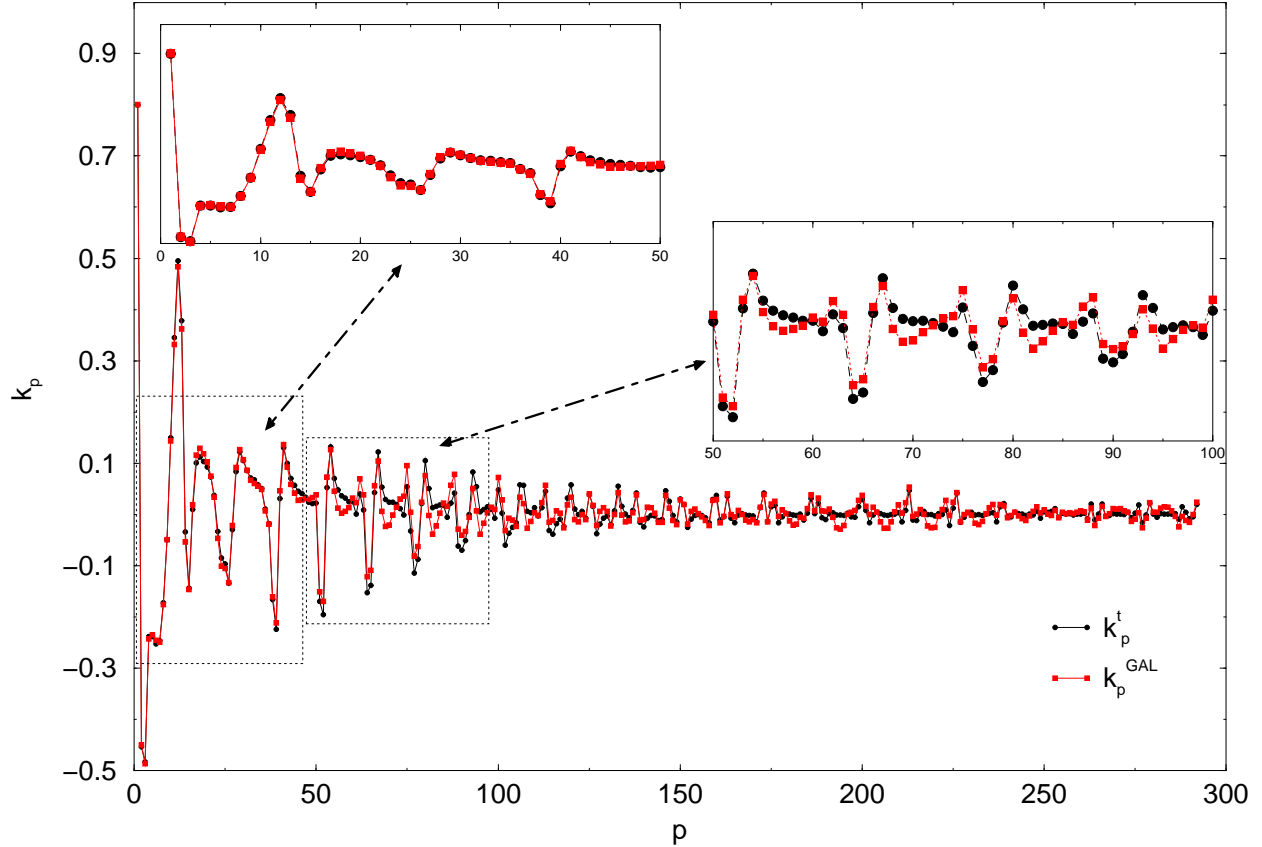


Figura 7.3: Coefficienti di riflessione stimati con l'algoritmo di Durbin e con il metodo GAL.

La stima dei coefficienti a_p può essere fatta ad ogni ordine p e ad ogni iterazione n in modo tale da poter avere ad ogni iterazione n una stima dello spettro di rumore $S_{AR}^n(f)$ di ordine p .

In realtà possiamo scegliere di fare tale operazione, se fissiamo una volta per tutte l'ordine del filtro (come nel nostro caso), solamente all'ultimo stadio P del filtro.

Quindi gli errori nella stima degli ultimi coefficienti k_p si propagano nella stima dei primi coefficienti a_p . Questo risulta palese in figura 7.4 dove abbiamo riportato l'andamento dei primi due parametri AR con il numero di iterazioni. Si può osservare che dopo 4 minuti di dati non si è ancora raggiunta la convergenza ai valori veri a_1^t e a_2^t .

Tutto questo si traduce in una stima spettrale errata come possiamo osservare in figura 7.5 in cui riportiamo lo spettro teorico e lo spettro risultante $S_{AR}(f)$ stimato con i coefficienti a_p in uscita dall'algoritmo GAL.

Lo spettro teorico viene riprodotto solo approssimativamente dall'algoritmo GAL come è evidente in figura 7.5. In particolare i primi due picchi non vengono individuati dall'algoritmo

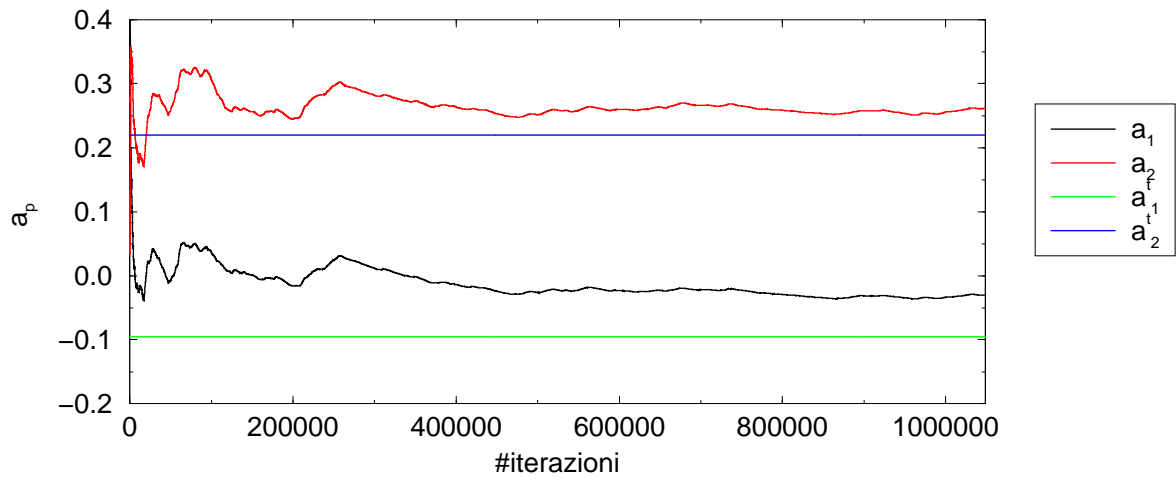


Figura 7.4: Convergenza dei coefficienti AR al valore vero dopo 4 minuti di dati.

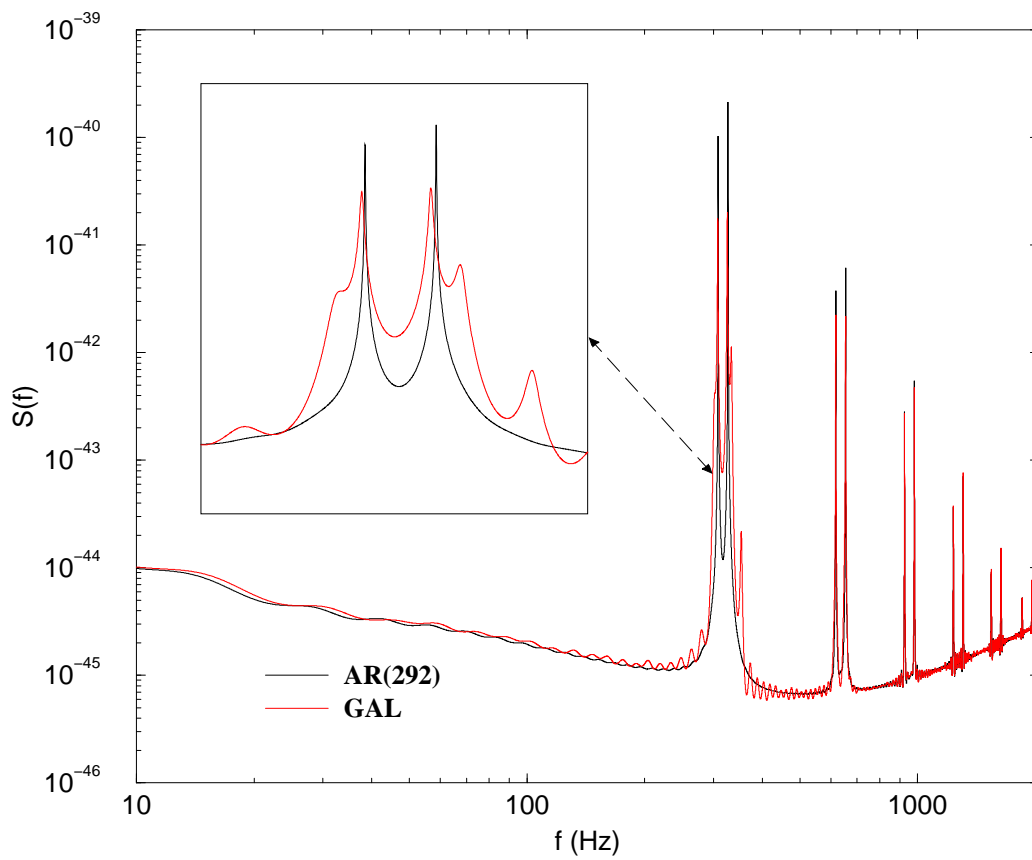


Figura 7.5: Spettro di rumore con coefficienti AR stimati con il metodo GAL e modello AR(292) e spettro teorico di VIRGO .

GAL. Tale andamento non migliora se aumentiamo il numero di iterazioni. Possiamo dedurre quindi che l'estimatore GAL è un estimatore non consistente. Tale inconsistenza è dovuta al fatto che la funzione costo utilizzata nella relazione di adattamento dei pesi è il valore istantaneo di quella che doveva essere una funzione statistica dell'errore. È evidente che tale filtro non può essere utilizzato in maniera efficiente come filtro di *whitening*, come dimostrano i risultati di figura 7.6.

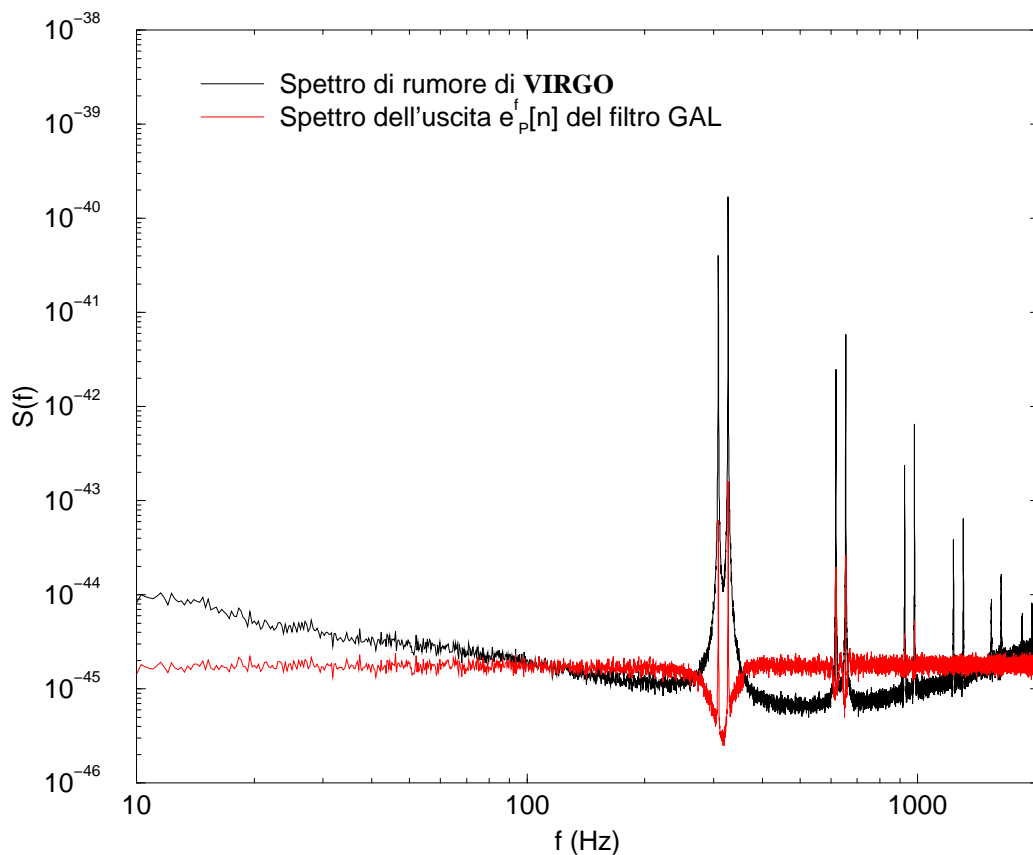


Figura 7.6: Spettro della sequenza $e_p^f[n]$ in uscita del filtro GAL mediato su 100 realizzazioni.

7.2 Metodi dei minimi quadrati

Tali metodi prendono il nome dal fatto che la funzione costo è data dalla somma degli errori quadratici ad ogni passo n dell'algoritmo. La minimizzazione di tale funzione costo è analoga alla minimizzazione che effettuiamo nella procedura di *best fit* di una funzione teorica con un campione di dati sperimentali.

Il primo algoritmo che analizzeremo, l'algoritmo RLS, ci introduce alla filosofia di questi metodi. Come vedremo è un algoritmo basato su una relazione ricorsiva per l'inversione della matrice di correlazione per risolvere le equazioni di Wiener-Hopf. L'implementazione in linea, anche se non è proibitiva, non è ottimale come quella che vedremo ci può offrire il filtro LSL.

Il filtro LSL appartiene ad una categoria di algoritmi veloci che impiegano le tecniche degli spazi vettoriali per risolvere le equazioni di Wiener-Hopf. Inoltre la sua struttura a reticolo è quello che cerchiamo per l'implementazione del filtro di *whitening* per il rumore del rivelatore VIRGO.

7.2.1 RLS

In questo algoritmo non troviamo i coefficienti di riflessione k_p che sono propri di una struttura a reticolo, ma direttamente il vettore dei pesi a_p del modello AR di ordine P .

Indichiamo il segnale da predire con $d[i]$ ed i dati acquisiti su cui si basa la predizione con il vettore $\mathbf{x} = (x[i-1], x[i-2], \dots, x[i-P])^T$ di P dati. Definiamo la stima $\hat{x}[i]$ al passo i -esimo costruita con il vettore pesi stimato all'iterazione n -esima come

$$\hat{x}[i] = \sum_{k=1}^P x_{i-k} w_k[n]. \quad (7.21)$$

Definiamo come funzione di errore all'iterazione i -esima la differenza tra il valore della funzione cercata $d[i]$ e la stima $\hat{x}[i]$ che abbiamo costruito con il vettore dei pesi \mathbf{w} stimato all'iterazione n

$$e(i|n) = d[i] - \sum_{k=1}^P x_{i-k} w_k[n]. \quad (7.22)$$

La funzione costo da minimizzare al passo n è la somma del quadrato della funzione errore a tutti i passi precedenti

$$\epsilon[n] = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} e^2(i|n). \quad (7.23)$$

È stato introdotto il parametro λ , $0 < \lambda \leq 1$, come funzione peso dei dati. Come vedremo nell'ultima sezione quando studieremo alcuni modelli AR non stazionari, λ gioca un ruolo chiave per l'inseguimento delle non stazionarietà. Esso permette di pesare in misura maggiore i dati più recenti per adattare i parametri e per questo viene anche definito come *forgetting factor*. La quantità $\frac{1}{1-\lambda}$ è la memoria temporale del filtro. Un valore di $\lambda = 1$ (caso *prewindowed*) significa che tutti i dati sono pesati in maniera uguale: il filtro in questo caso ha memoria infinita.

La funzione costo definita in (7.23) dipende non da quantità mediate della sequenza di dati in ingresso, ma dal valore istantaneo dei dati che utilizziamo per effettuare la stima $\hat{x}[i]$. Il criterio

che quindi deriveremo per adattare i pesi \mathbf{w} non è ottimale in senso statistico come per i metodi stocastici, ma è ottimale ad ogni iterazione per i dati che abbiamo acquisito.

Il minimo della funzione costo (7.23) si ottiene azzerando il suo gradiente. Tale operazione produce le equazioni normali

$$\mathbf{R}[n]\mathbf{w}[n] = \mathbf{p}[n], \quad (7.24)$$

dove $\mathbf{R}[n]$ è la matrice di autocorrelazione definita come

$$\mathbf{R}[n] = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{x}[i] \mathbf{x}^T[i], \quad (7.25)$$

ed il vettore di correlazione incrociata \mathbf{p} è dato da

$$\mathbf{p}[n] = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} d[i] \mathbf{x}[i]. \quad (7.26)$$

Sottolineiamo ancora una volta che la funzione di correlazione e di correlazione incrociata qui non sono mediate su un *ensemble*, ma funzioni stimate su singole realizzazioni dei dati.

Il filtro ottimale di predizione lineare si ottiene risolvendo le equazioni

$$\mathbf{w}[n] = \mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{p}[n]. \quad (7.27)$$

L'inversione diretta della matrice $P \times P$ \mathbf{R} richiederebbe un numero dell'ordine P^3 di operazioni e di P^3 di allocazione di memoria e quindi risulterebbe proibitiva dal punto di vista computazionale per alti valori di P . Tuttavia se osserviamo che l'eq. 7.27 è valida per ogni n , possiamo assumere che le quantità al tempo precedente $n-1$ siano note e stimare quelle al tempo successivo sulla base di queste e dei dati acquisiti al tempo n . Possiamo trovare una relazione ricorsiva per l'inversione della matrice \mathbf{R} grazie al lemma della inversione di matrici.

Osserviamo infatti che dall'equazione (7.25) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{R}[n] &= \lambda \left[\sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{n-i} \mathbf{x}[i] \mathbf{x}^T[i] \right] + \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \\ &= \lambda \mathbf{R}[n-1] + \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Il lemma dell'inversione di matrice afferma che se una matrice quadrata \mathbf{R} può essere scritta come

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{c}^T, \quad (7.29)$$

allora possiamo scrivere la sua inversa \mathbf{R}^{-1} come

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} (1 + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}) \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \quad (7.30)$$

La matrice $\mathbf{R}[n]$ rientra nelle condizioni del lemma suddetto e se identifichiamo

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{R}[n-1] , \quad (7.31)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{x}[n] , \quad (7.32)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{x}^T[n] , \quad (7.33)$$

la matrice inversa $\mathbf{R}^{-1}[n]$ può essere scritta

$$\mathbf{R}^{-1}[n] = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{R}^{-1}[n-1] - \frac{\mathbf{R}^{-1}[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n-1]}{\lambda + \mu[n]} \right] , \quad (7.34)$$

dove

$$\mu[n] = \mathbf{x}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n-1] \mathbf{x}[n] . \quad (7.35)$$

Per semplificare le equazioni ricorsive con le quali implementare numericamente l'algoritmo è conveniente definire la matrice

$$\mathbf{C}[n] = \mathbf{R}^{-1}[n] , \quad (7.36)$$

ed un vettore di lunghezza P

$$\mathbf{g}[n] = \frac{\mathbf{C}[n-1] \mathbf{x}[n]}{\lambda + \mu[n]} , \quad (7.37)$$

detto vettore di guadagno e scrivere una relazione ricorsiva per $\mathbf{C}[n]$ come

$$\mathbf{C}[n] = \frac{1}{\lambda} [\mathbf{C}[n-1] - \mathbf{g}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{C}[n-1]] . \quad (7.38)$$

Anche per il vettore di correlazione incrociata si può scrivere una relazione ricorsiva

$$\mathbf{p}[n] = \lambda \mathbf{p}[n-1] + d[n] \mathbf{x}[n] . \quad (7.39)$$

La relazione (7.27) può quindi essere riscritta come relazione ricorsiva in termini della nuova quantità $\mathbf{g}[n]$ come

$$\begin{aligned} \mathbf{w}[n] &= \mathbf{w}[n-1] + \mathbf{g}[n] [d[n] - \mathbf{x}^T[n] \mathbf{w}[n-1]] \\ &= \mathbf{w}[n-1] + \mathbf{g}[n] e[n|n-1] . \end{aligned} \quad (7.40)$$

Quindi per trovare il vettore ottimale dei pesi \mathbf{w} nell'algoritmo RLS, è necessario calcolare le P componenti del vettore di guadagno \mathbf{g} . Le operazioni necessarie per la stima del vettore di guadagno sono tutte ricorsive. Occorre inizializzare le quantità al tempo $n = 0$

$$\mathbf{w}[0] = \mathbf{x}[0] = 0 \quad (7.41)$$

$$\mathbf{C}[0] = \delta \mathbf{I} \quad \text{con } \delta \text{ costante} \quad \delta \gg 1 \quad (7.42)$$

essendo \mathbf{I} la matrice identità e stimare tali quantità all'iterazione successiva con le relazioni (7.22) (7.35) (7.37) (7.40) (7.38).

Il costo computazionale di tali operazioni per il filtro RLS è circa $7P^2$ per ciascuna iterazione [47], per un vettore pesi lungo P .

7.2.2 Risultati per lo spettro di rumore di VIRGO

Per valutare l'efficienza dell'algoritmo RLS nella stima dello spettro di rumore di VIRGO, come per l'algoritmo GAL, implementiamo tale algoritmo sui dati simulati. In questi esperimenti numerici abbiamo preferito scegliere un campione di dati più corto, dato il costo computazionale richiesto dall'algoritmo. In particolare abbiamo utilizzato circa 1 minuto di dati, scegliendo sempre una frequenza di campionamento di 4096 Hz.

In tale filtro, di tipo trasversale, vengono adattati direttamente i pesi del filtro senza calcolare i coefficienti di riflessione. La parte bianca dello spettro dei dati in ingresso sarà data dalla funzione di errore in uscita del filtro, mentre i coefficienti w stimati costituiranno i parametri del modello AR con il quale stimare lo spettro di rumore di VIRGO.

Anche in questo caso vogliamo verificare quanto buono risulta il fit ottenuto con il modello AR con i parametri stimati con l'algoritmo RLS allo spettro di rumore originario e quanto veloce sia la convergenza al valore vero dei parametri.

In figura 7.7 riportiamo le curve di convergenza per i primi due coefficienti a_1 e a_2 e per gli ultimi due coefficienti a_{291} e a_{292} stimati dall'algoritmo RLS ed i valori veri corrispondenti a_1^t , a_2^t , a_{291}^t e a_{292}^t . Consideriamo il risultato in figura 7.7 e confrontiamolo con il risultato ottenuto

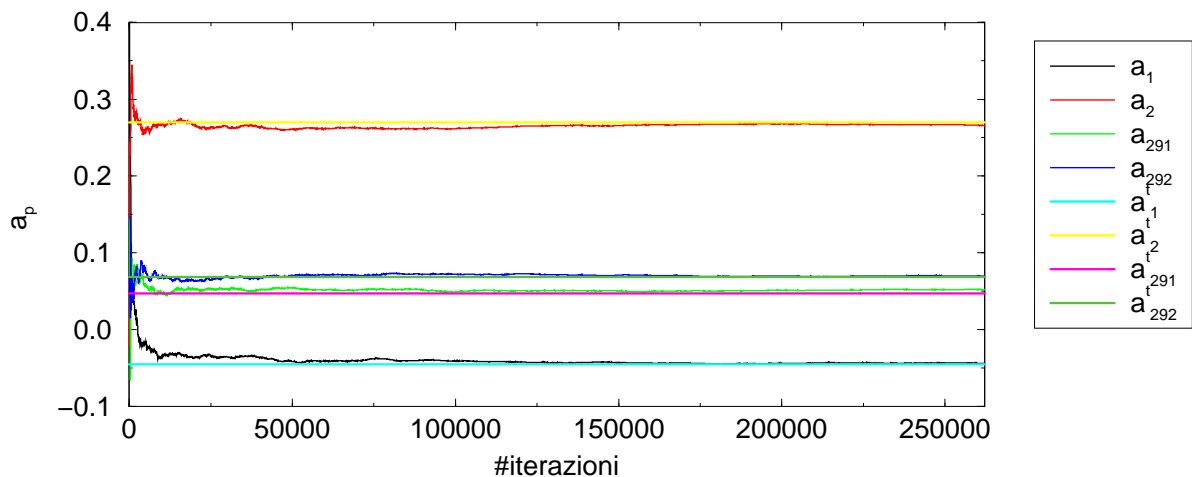


Figura 7.7: Convergenza dei primi due e degli ultimi due coefficienti AR al valore vero.

per l'algoritmo GAL in figura 7.4. Risultano evidenti due notevoli differenze

- l'algoritmo RLS **converge** al valore vero;
- la convergenza avviene su tempi brevi, dell'ordine di 30 sec

Per l'algoritmo GAL la convergenza era molto più lenta e si raggiungeva solamente per i primi coefficienti di riflessione, ma per nessuno dei parametri a_p .

La convergenza al valore vero dei parametri a_p , invece, per l'algoritmo RLS si realizza per tutti i coefficienti a_p dopo un minuto di dati. Infatti anche gli ultimi due coefficienti a_{291}^t e a_{292}^t hanno raggiunto la convergenza dopo un minuto di dati.

In figura 7.8 riportiamo i 292 parametri del modello AR stimati con l'algoritmo RLS dopo un minuto di iterazioni ed i corrispondenti valori veri. Abbiamo ingrandito le zone corrispondenti ai primi 50 coefficienti e agli ultimi 70. Come si può notare, una leggera discrepanza è osservabile solo nella stima degli ultimi coefficienti. Tuttavia la stima spettrale del rumore di VIRGO ottenuta con tali parametri è una buona stima come possiamo notare in figura 7.9.

Infatti le caratteristiche principali dello spettro originario sono ben riprodotte.

7.3 Algoritmi veloci per i metodi dei minimi quadrati

Nonostante le buone prestazioni dell'algoritmo RLS, il suo costo computazionale è tale da non permettere una implementazione in linea. Inoltre la struttura non è modulare come per l'algoritmo GAL e quindi l'ordine P del filtro di *whitening* o di predizione lineare deve essere scelto

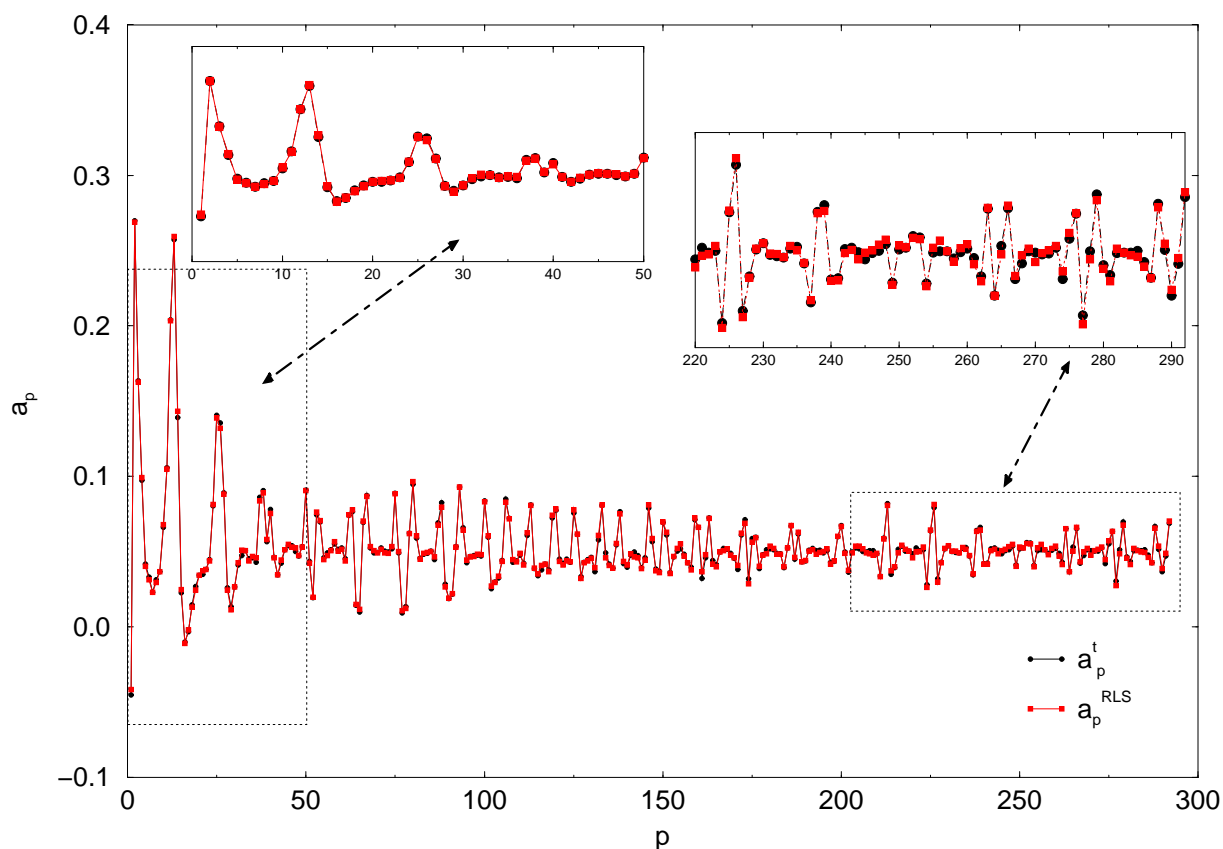


Figura 7.8: Parametri del modello AR stimati con il metodo RLS e con l'algoritmo di Durbin.

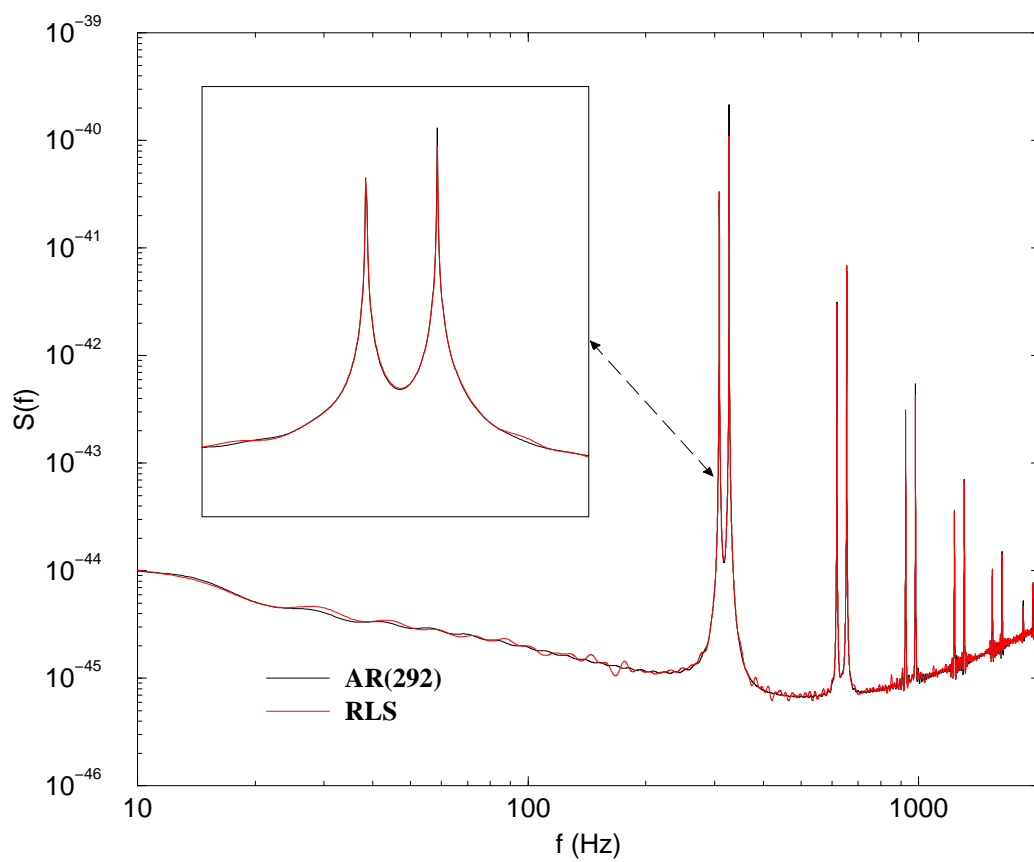


Figura 7.9: Spettro di rumore di VIRGO stimato con il metodo RLS e modello AR(292).

una volta per tutte. Gli algoritmi a struttura modulare come quelli a reticolo offrono invece il vantaggio di fornire un risultato in uscita per un ordine qualsiasi del filtro; eventualmente è anche possibile modificare in linea l'ordine del filtro, ponendo per esempio una soglia sul valore massimo dei coefficienti di riflessione per decidere se aumentare o diminuire l'ordine.

In questa sezione introdurremo il filtro LSL: è un filtro a struttura modulare, basato sul metodo dei minimi quadrati e quindi con le stesse prestazioni del filtro RLS, ma che ha un costo computazionale che cresce linearmente con il numero P dei pesi e non quadraticamente come per l'RLS. Il filtro LSL [56] [57] appartiene ad una classe di algoritmi veloci basati sul metodo dei minimi quadrati che utilizzano le tecniche proprie degli spazi vettoriali per adattare i coefficienti di riflessione ad ogni ordine e ad ogni interazione.

7.3.1 Spazi vettoriali per i filtri RLS

In questa sezione introduciamo le tecniche sugli spazi vettoriali che ci permettono una formulazione “veloce” dei metodi dei minimi quadrati. Cercheremo di non entrare nei dettagli tecnici, ben descritti in [47], per non appesantire le notazioni, con l'intento di spiegare solo i concetti alla base di tali tecniche.

Consideriamo il problema della predizione lineare: nei metodi dei minimi quadrati la predizione viene fatta per un intero vettore di dati $\hat{\mathbf{x}}[n]$ piuttosto che per un valore scalare come nei metodi del gradiente. Infatti nei metodi dei minimi quadrati la funzione costo è definita come una norma del vettore errore $\mathbf{e}(n|n)$ le cui componenti sono

$$\begin{aligned} e(1|n) &= d[1] - x[1]w_1[n] \\ e(2|n) &= d[2] - x[2]w_1[n] - x[1]w_2[n] \\ &\vdots \\ e(n|n) &= d[n] - x[n-1]w_1[n] - \dots - x[n-p]w_p[n]. \end{aligned}$$

L'ambiente naturale dove sviluppare i metodi dei minimi quadrati sono dunque gli spazi vettoriali.

Sia \mathbf{X} uno spazio vettoriale di Hilbert p -dimensionale a cui appartengono i vettori dati $\mathbf{x}[n]$ dei dati acquisiti. La base di tale spazio è costituita dai p vettori $\mathbf{x}_j[n]$ di lunghezza n ottenuti come traslazioni temporali di lunghezza p del vettore $\mathbf{x}[n]$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1[n] = z^{-1}\mathbf{x}[n] &= (0, 0, x[1], \dots, x[n-1]), \\ \mathbf{x}_2[n] = z^{-2}\mathbf{x}[n] &= (0, 0, 0, x[1], \dots, x[n-2]), \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_p[n] = z^{-p}\mathbf{x}[n] &= (0, 0, 0, \dots, x[1], \dots, x[n-p]). \end{aligned}$$

Un vettore \mathbf{u} appartenente a questo spazio può essere scritto come

$$\mathbf{u}[n] = \sum_{k=1}^p a_k \mathbf{x}_k[n]. \quad (7.43)$$

Il vettore $\mathbf{x}_{p+1}[n]$ la cui ultima componente è $x[n]$ non appartiene a questo spazio, ma ad uno spazio vettoriale \mathbf{D} di dimensione $p + 1$.

Nel problema della predizione lineare noi cerchiamo la miglior stima del segnale desiderato $\mathbf{d}[n]$, ossia del vettore $\mathbf{x}_{p+1}[n]$, utilizzando i vettori giacenti nello spazio \mathbf{X} .

I metodi *Least Squares* cercano dunque il vettore $\hat{\mathbf{x}}[n]$ “più vicino” al vettore $\mathbf{d}[n]$, minimizzando la norma del vettore distanza tra $\hat{\mathbf{x}}[n]$ e $\mathbf{d}[n]$. Si può mostrare che tale operazione corrisponde a proiettare il vettore $\mathbf{d}[n]$ dallo spazio vettoriale \mathbf{D} di dimensione $p + 1$ sul sottospazio \mathbf{X} di dimensione p con un operatore \mathbf{P} di proiezione. Possiamo decomporre il vettore $\mathbf{d}[n]$ come somma del vettore $\hat{\mathbf{x}}[n]$ e di un vettore che ha componente non nulla solo lungo il versore ortogonale allo spazio \mathbf{X} . Tale vettore è il vettore $\mathbf{e}(n|n)$, che per definizione è ortogonale ai vettori di dati $\mathbf{x}[n]$. Infatti il vettore ortogonale allo spazio \mathbf{X} , per la proprietà degli operatori di proiezione, si può ottenere dalla relazione

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{d}[n] = \mathbf{d}[n] - \mathbf{P}\mathbf{d}[n] = \mathbf{d}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n] = \mathbf{e}(n|n). \quad (7.44)$$

Il vettore $\mathbf{d}[n]$ dunque appartiene allo spazio vettoriale \mathbf{D} somma diretta del sottospazio \mathbf{X} e del sottospazio definito dal vettore $\mathbf{e}(n|n)$, che indichiamo con \mathbf{E}

$$\mathbf{D} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{E}. \quad (7.45)$$

Vediamo ora in che modo tali relazioni tra il segnale cercato e la stima $\hat{\mathbf{x}}[n]$ sono vantaggiose per l'implementazione dei metodi dei minimi quadrati.

Negli algoritmi adattivi LS vogliamo poter scrivere le quantità necessarie per effettuare la stima $\hat{\mathbf{x}}[n]$ all'iterazione n in termini delle quantità alla iterazione $n - 1$ e se utilizziamo una struttura modulare vogliamo anche adattare le stesse quantità in termini dell'ordine del filtro come avviene per i filtri a reticolo.

Con le tecniche degli spazi vettoriali descritte, aumentare l'ordine del filtro da p a $p + 1$ corrisponde a scrivere il nuovo operatore di proiezione \mathbf{P}_{p+1} in termini del vecchio operatore di proiezione \mathbf{P}_p .

Questa è un'operazione semplice da effettuare, perché il nuovo spazio vettoriale sarà la somma diretta di quello vecchio \mathbf{X} di dimensione p e del sottospazio di dimensione 1 ortogonale a \mathbf{X} lungo cui giace $\mathbf{e}(n|n)$. Quindi il nuovo operatore di proiezione si otterrà come

$$\mathbf{P}_{p+1} = \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_1, \quad (7.46)$$

dove per semplicità di notazione abbiamo scritto \mathbf{P}_\perp per indicare il proiettore sullo spazio $\perp \mathbf{X}$ di dimensione 1.

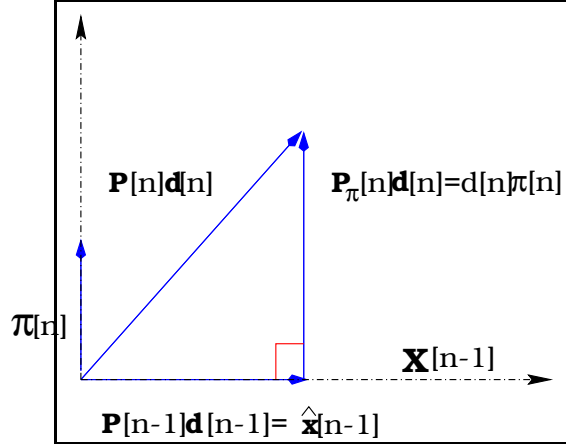


Figura 7.10: Proiettore $\mathbf{P}[n]$ in funzione di $\mathbf{P}[n-1]$.

$$\mathbf{P}[n]\mathbf{d}[n] = \mathbf{P}[n-1]\mathbf{d}[n-1] + \mathbf{P}_{\pi[n]}\mathbf{d}[n] = \hat{\mathbf{x}}[n-1] + \mathbf{P}_{\pi[n]}\mathbf{d}[n]. \quad (7.47)$$

La relazione (7.47) risulta più chiara in figura 7.10, dove abbiamo indicato con una sola dimensione il sottospazio $\mathbf{X}[n-1]$ e con $\pi[n]$ il versore $\perp \mathbf{X}[n-1]$.

Quindi possiamo scrivere in forma matriciale la relazione (7.47)

$$\mathbf{P}[n] = \begin{pmatrix} \mathbf{P}[n-1] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.48)$$

Un parametro utile che viene introdotto naturalmente è il parametro che quantifica la variazione d'angolo tra i sottospazi $\mathbf{X}[n-1]$ e $\mathbf{X}[n]$ che indichiamo con $\gamma_p[n-1]$ e che si ottiene dalla relazione

$$\gamma_p[n-1] = \langle \pi[n], \mathbf{P}_p^\perp[n]\pi[n] \rangle, \quad (7.49)$$

dove abbiamo introdotto il prodotto scalare \langle, \rangle tra due vettori $\mathbf{a}[n]$ $\mathbf{b}[n]$ definito come

$$\langle \mathbf{a}[n], \mathbf{b}[n] \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} u[k]v[k], \quad (7.50)$$

e dove $\mathbf{P}_p^\perp[n] = \mathbf{I} - \mathbf{P}_p[n]$. Ricordiamo che λ è il parametro di *forgetting*; se ci limitiamo al caso $\lambda = 1$ il prodotto scalare \langle, \rangle è il prodotto scalare $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$.

In termini del parametro γ si può scrivere una relazione di adattamento per l'operatore di proiezione $\mathbf{P}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_p$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_p^\perp[n-1] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_p^\perp[n] - \frac{\mathbf{P}_p^\perp[n]\mathbf{P}_{\pi[n]}\mathbf{P}_p^\perp[n]}{\gamma_p[n]}. \quad (7.51)$$

È importante sottolineare che con queste tecniche tutte le relazioni di adattamento vengono effettuate su quantità scritte in termini di proiettori. Nell'algoritmo RLS dovevamo invertire una matrice di ordine $P \times P$ e, anche sfruttando il lemma della matrice inversa, effettuare $\simeq P^2$ operazioni.

Gli operatori di proiezione sono matrici di ordine $P \times P$ con solo P valori indipendenti. Quindi ad ogni iterazione sono necessarie un numero di operazioni proporzionale a P e non a P^2 per adattare il nuovo operatore di proiezione.

7.3.2 LSL

Il filtro LSL è un filtro basato sul metodo dei minimi quadrati con struttura a reticolo come il filtro di predizione lineare del capitolo 7 ed il filtro GAL. Tale filtro è dunque caratterizzato da relazioni ricorsive per l'errore *forward* FPE e l'errore *backward*. Con le notazioni introdotte nella sezione precedente indichiamo il vettore di errori *forward* allo stadio della struttura a reticolo di ordine p come

$$\mathbf{e}_p^f[n] = \mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n] = [\mathbf{I} - \mathbf{P}_p[n]] \mathbf{x}[n] , \quad (7.52)$$

essendo $\mathbf{P}_p[n]$ la matrice di proiezione sul sottospazio vettoriale di ordine p . L'errore scalare $e_p^f[n]$ può essere scritto come la componente lungo la direzione $\boldsymbol{\pi}[n]$ del versore perpendicolare al sottospazio $\mathbf{X}[n-1]$

$$e_p^f = \langle \boldsymbol{\pi}[n], \mathbf{e}_p^f[n] \rangle . \quad (7.53)$$

In maniera analoga possiamo scrivere il vettore di errori *backward*. Ricordiamo che il vettore di errore *backward* è la differenza tra il dato $x[n-p]$ e la stima che otteniamo con i p dati più recenti $x[n], x[n-1], \dots, x[n-p+1]$. Lo spazio dove facciamo la predizione è diverso dal sottospazio $\mathbf{X}[n]$ perché la base è ora data dai vettori $z^0 \mathbf{x}[n], \dots, z^{-(p-1)} \mathbf{x}[n]$. Se introduciamo l'operatore di proiezione P_{p-1} su questa nuova base possiamo scrivere in forma compatta

$$\mathbf{e}_p^b[n] = [\mathbf{I} - \mathbf{P}_{p-1}[n]] z^{-p} \mathbf{x}[n] . \quad (7.54)$$

Analogamente l'errore *backward* scalare è dato da

$$e_p^b[n] = \langle \boldsymbol{\pi}[n], \mathbf{e}_p^b[n] \rangle . \quad (7.55)$$

La somma dei quadrati degli errori *forward* e *backward* si scrive

$$\epsilon_p^f[n] = \langle \mathbf{e}_p^f[n], \mathbf{e}_p^f[n] \rangle \quad (7.56)$$

$$\epsilon_p^b[n] = \langle \mathbf{e}_p^b[n], \mathbf{e}_p^b[n] \rangle \quad (7.57)$$

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per scrivere le relazioni del filtro a reticolo per adattare gli errori FPE e BPE con l'ordine del reticolo. Infatti se si utilizzano le relazioni ricorsive per gli operatori di proiezione nell'equazioni (7.52) e (7.54) otteniamo

$$e_{p+1}^f[n] = e_p^f[n] + k_{p+1}^b[n]e_p^b[n-1], \quad (7.58)$$

$$e_{p+1}^b[n] = e_p^b[n-1] + k_{p+1}^f[n]e_p^f[n], \quad (7.59)$$

dove abbiamo introdotto i coefficienti di riflessione *forward* k_p^f e *backward* k_p^b definiti dalle relazioni

$$k_{p+1}^b[n] = -\frac{\langle z^{-1}\mathbf{e}_p^b[n], \mathbf{e}_p^f[n] \rangle}{\epsilon_p^b[n-1]}, \quad (7.60)$$

$$k_{p+1}^f[n] = -\frac{\langle z^{-1}\mathbf{e}_p^b[n], \mathbf{e}_p^f[n] \rangle}{\epsilon_p^f[n]}. \quad (7.61)$$

L'implementazione in maniera adattiva del filtro a reticolo LSL descritto dalle relazioni (7.58) (7.59) richiede solo l'adattamento con l'ordine p e con il tempo n dei coefficienti di riflessione. Quindi occorre scrivere le relazioni ricorsive solo per le quantità $\epsilon_p^f[n]$, $\epsilon_p^b[n]$ e della quantità $\Delta_{p+1}[n] = \langle z^{-1}\mathbf{e}_p^b[n], \mathbf{e}_p^f[n] \rangle$.

Questo può essere fatto utilizzando le formule di adattamento dei proiettori nel tempo (7.48),ottenendo

$$\Delta_{p+1}[n] = \lambda\Delta_{p+1}[n-1] + \frac{e_p^b[n-1]e_p^f[n]}{\gamma_p[n-1]}, \quad (7.62)$$

$$\epsilon_{p+1}^f[n] = \lambda\epsilon_p^f[n] - \frac{\Delta_{p+1}^2[n]}{\epsilon_p^b[n-1]}, \quad (7.63)$$

$$\epsilon_{p+1}^b[n] = \lambda\epsilon_p^b[n-1] - \frac{\Delta_{p+1}^2[n]}{\epsilon_p^f[n]}, \quad (7.64)$$

$$\gamma_{p+1}[n-1] = \gamma_p[n-1] - \frac{[e_p^b[n-1]]^2}{\epsilon_p^b[n-1]}, \quad (7.65)$$

dove abbiamo introdotto il parametro angolo $\gamma_p[n-1]$ definito in (7.49).

7.3.3 Risultati per lo spettro di rumore di VIRGO

Valutiamo le prestazioni dell'algoritmo LSL su simulazioni numeriche dello spettro di rumore di VIRGO. La struttura del filtro LSL è a reticolo quindi i pesi che adatteremo in questo caso sono i coefficienti di riflessione k_p^f e k_p^b . Bisogna notare che ora i coefficienti di riflessione sono indicati con i suffissi $b=backward$ e $f=forward$ perché in caso di non stazionarietà i coefficienti

di riflessione possono essere diversi tra loro. Tuttavia in queste simulazioni utilizziamo una realizzazione stazionaria del modello AR del rumore di VIRGO e quindi i coefficienti k_p^f e k_p^b saranno uguali. Indicheremo quindi genericamente i coefficienti di riflessione con k_p .

Inoltre, essendoci limitati al caso stazionario, utilizzeremo l'algoritmo con dati *prewindowed* ponendo $\lambda = 1$.

Ci aspettiamo che il filtro LSL mostri le stesse prestazioni ottenute con l'algoritmo RLS, pur avendo un'implementazione più veloce. Per questo motivo utilizzeremo circa un minuto di dati per adattare i coefficienti di riflessione scegliendo sempre una frequenza di campionamento di 4096 Hz.

I parametri del modello AR vengono stimati a partire dai coefficienti di riflessione con la relazione (6.7). L'errore FPE e_p^f all'ultimo stadio del filtro sarà, come nel filtro GAL, la parte

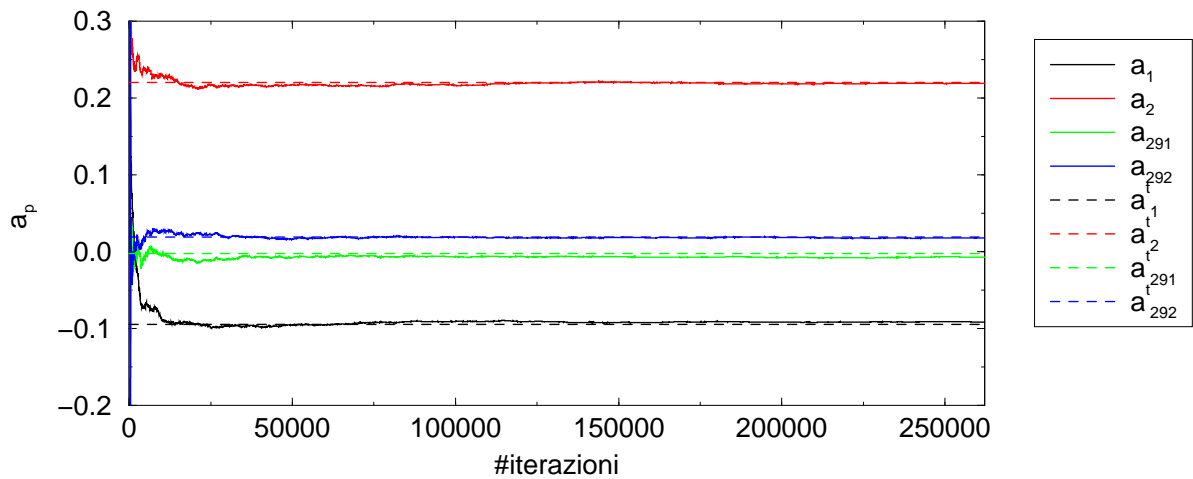


Figura 7.11: Convergenza al valore vero dei primi due e degli ultimi due coefficienti AR stimati con l'algoritmo LSL.

della sequenza dei dati in ingresso al filtro caratterizzata da uno spettro bianco. Quindi in uscita dal filtro LSL otteniamo la stima dei parametri del modello AR(292) e quindi la stima spettrale del rumore di VIRGO e il risultato del filtro di *whitening* sui dati in ingresso.

In figura 7.11 riportiamo l'andamento con il numero di iterazioni dei primi due e degli ultimi due coefficienti a_p stimati con il filtro LSL e per confronto il valore vero a_1^t , a_2^t , a_{291}^t e a_{292}^t .

Come ci aspettavamo le prestazioni sono simili a quelle del filtro RLS e la convergenza si raggiunge dopo circa 30 sec di dati.

Tale andamento è soddisfatto da tutti i coefficienti a_p come possiamo notare in figura 7.12 dove abbiamo graficato i valori dei coefficienti AR stimati con l'algoritmo LSL e per confronto il valore vero del modello AR(292). Sono state evidenziate le zone corrispondenti ai primi 50

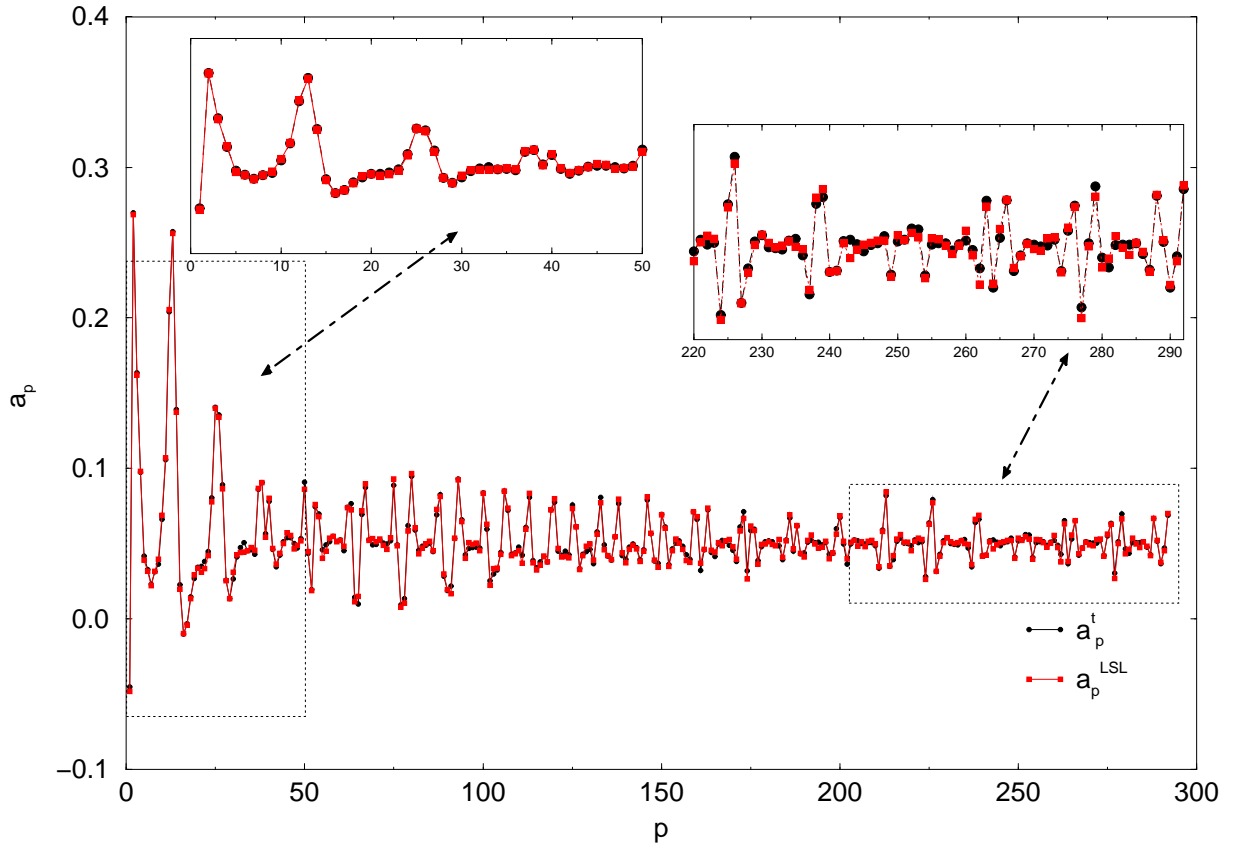


Figura 7.12: Coefficienti AR stimati con il metodo LSL e valori veri del modello AR(292).

coefficienti e agli ultimi 70 coefficienti. Come per il filtro RLS si ottiene una leggera discrepanza solo per gli ultimi coefficienti.

In ogni caso la stima spettrale che otteniamo con tali valori dei parametri AR riproduce lo spettro teorico di VIRGO nelle caratteristiche principali. In particolare tutti i picchi di violino sono individuati e riprodotti come risulta chiaro in figura 7.13.

In solo un minuto di dati siamo riusciti ad identificare un modello AR con 292 parametri. Se pensiamo a non stazionarietà con un periodo dell'ordine dell'ora, possiamo ottenere in linea sia una stima spettrale corretta che lo spettro dei dati su cui è stata effettuata la procedura di *whitening*.

Un'uscita del filtro LSL è data dall'errore di predizione forward $e_p^f[n]$. Sappiamo che questa sequenza rappresenta la parte del segnale dal quale non siamo più in grado di estrarre informazioni e quindi caratterizzata da uno spettro piatto.

In figura 7.14 riportiamo lo spettro della sequenza $e_p^f[n]$ ottenuto come periodogramma

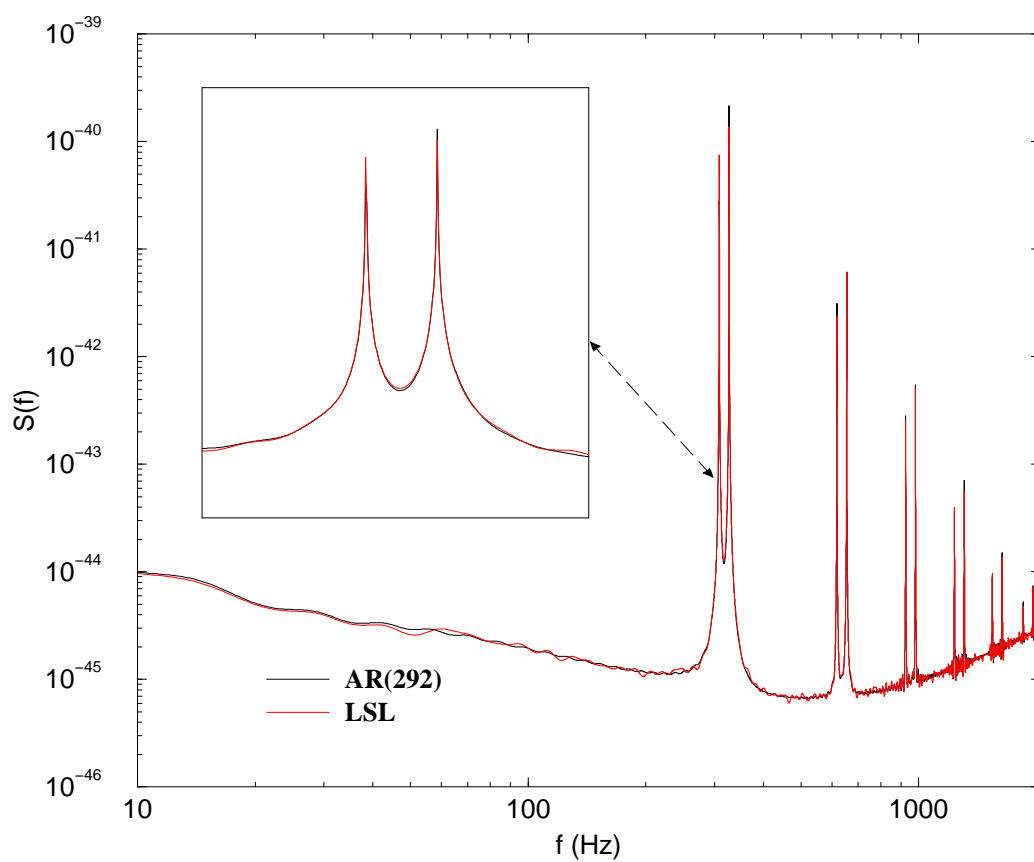


Figura 7.13: Spettro di rumore VIRGO con coefficienti AR stimati con il metodo LSL e modello AR(292).

medio su 100 realizzazioni del rumore, così come lo spettro del rumore di VIRGO.

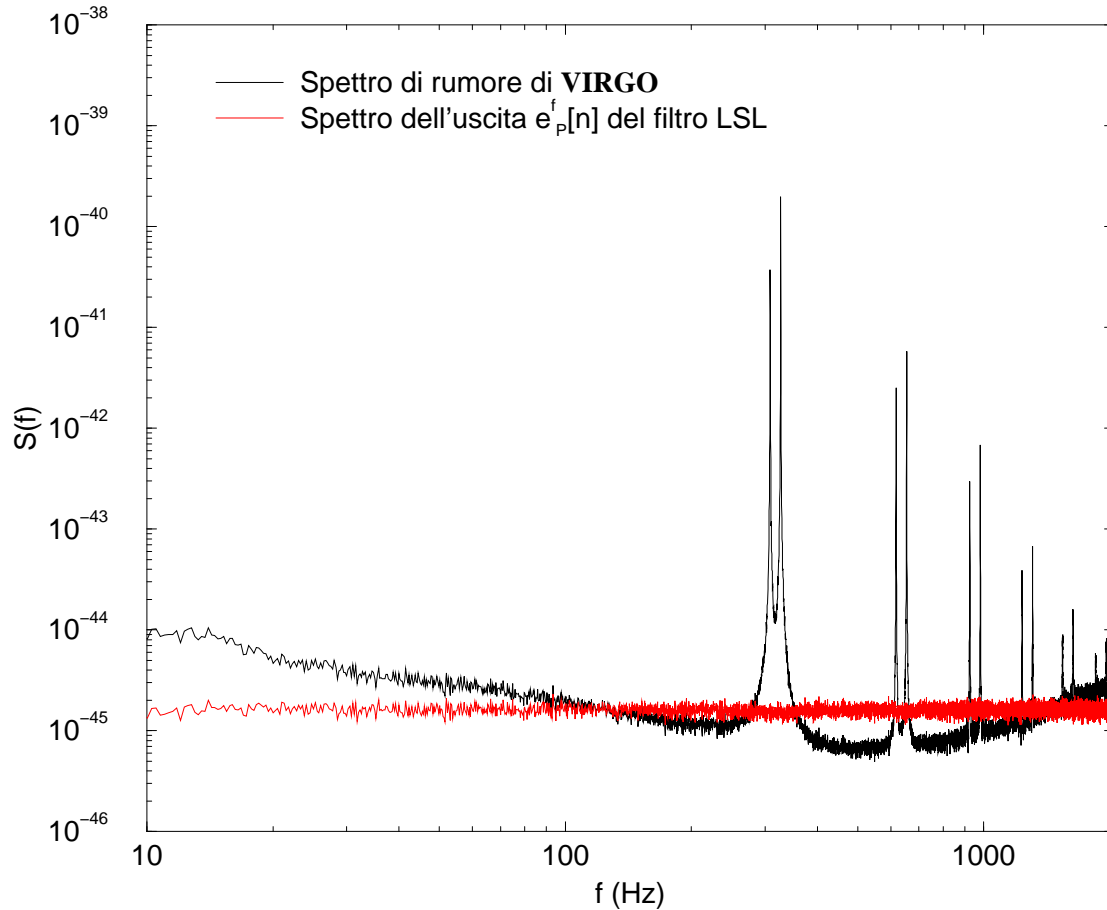


Figura 7.14: Spettro di rumore VIRGO e spettro della sequenza $e_p^f[n]$ del filtro LSL mediato su 100 realizzazioni.

Risulta chiaro che il filtro a reticolo LSL è un ottimo filtro di *whitening* che offre rispetto al filtro di *whitening* di Durbin il vantaggio di essere adattivo. Il filtro di *whitening* costruito come LSL dunque avrà i parametri che si possono adattare per inseguire le non stazionarietà del rumore. Inoltre, pur ammettendo di essere nel caso stazionario, i parametri vengono stimati direttamente dai dati in entrata con una rapida convergenza. Questa operazione permette la costruzione del filtro in linea, senza dovere prima stimare la funzione di autocorrelazione, evitando così la propagazione degli errori dalla stima della funzione di autocorrelazione a quella dei coefficienti di riflessione.

7.3.4 Statistica dell' LSL

Per valutare la qualità di un estimatore dobbiamo confrontare le sue prestazioni con limiti teorici.

Nel capitolo 6 abbiamo introdotto il criterio di Cramer-Rao (vedi appendice C per maggiori dettagli) per verificare la correttezza dell'ordine selezionato per il modello AR.

Innanzitutto occorre valutare se l'estimatore LSL è un estimatore senza *bias* e in questo caso se soddisfa il criterio di Cramer-Rao per i parametri AR:

$$\text{var}(\hat{a}_i) \geq \frac{\sigma^2}{N} [\mathbf{R}_{xx}^{-1}]_{ii} \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (7.66)$$

e

$$\text{var}(\hat{\sigma}) \geq \frac{2\sigma^2}{N}. \quad (7.67)$$

Abbiamo fissato come lunghezza massima N 1 minuto di dati e abbiamo stimato il *bias* sia per i parametri a_p che per i parametri k_p al variare del tempo. Le quantità statistiche sono valutate come medie su 100 realizzazioni del processo. Nelle figure 7.15 e 7.16 riportiamo il *bias* per ciascun coefficiente di riflessione

$$B(k_p) = \mathcal{E}[\hat{k}_p] - k_p^t \quad (7.68)$$

e per ciascun parametro del modello AR

$$B(a_p) = \mathcal{E}[\hat{a}_p] - a_p^t \quad (7.69)$$

stimato a due tempi diversi: il primo tempo corrisponde a 8 sec di dati e l'ultimo tempo a 64 sec. Si può osservare che le quantità $B(k_p)$ e $B(a_p)$ dopo un minuto di dati si sono annullate. A questo punto per valutare l'efficienza dell'estimatore LSL, dobbiamo verificare se la varianza della stima dei coefficienti a_p raggiunge il limite di Cramer-Rao (7.66). In figura 7.17 riportiamo la varianza stimata per i coefficienti a_p del modello AR che il filtro LSL ha prodotto e per riferimento il limite di Cramer-Rao teorico.

La varianza è stata stimata ad intervallo di tempi via via crescenti fino al limite di 64 sec. Si può osservare che la varianza dei coefficienti a_p diminuisce con l'aumentare del numero di iterazioni dell'algoritmo LSL fino a raggiungere per ciascun coefficiente il limite teorico di Cramer-Rao.

In maniera analoga abbiamo stimato l'andamento con il numero di iterazioni della variabile σ del modello AR. In figura 7.18 riportiamo i risultati.

Anche la varianza dell'ampiezza del modello AR σ soddisfa il criterio di Cramer-Rao. Concludiamo dunque che l'estimatore LSL è un estimatore efficiente.

Le buone prestazioni e la rapidità di convergenza dell'algoritmo LSL ci permettono di inseguire le lente non stazionarietà del rumore di VIRGO.

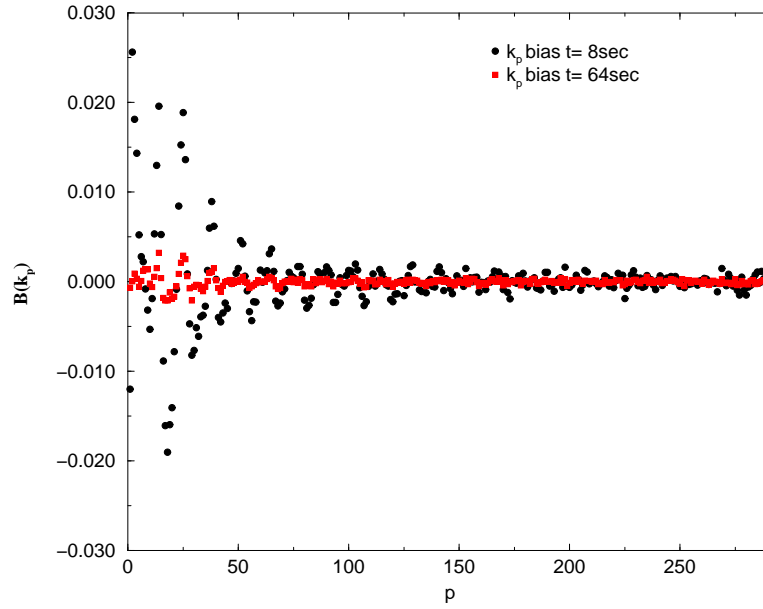


Figura 7.15: *Bias* per i coefficienti di riflessione k_p al tempo $t = 8\text{ sec}$ e al tempo $t = 64\text{ sec}$.

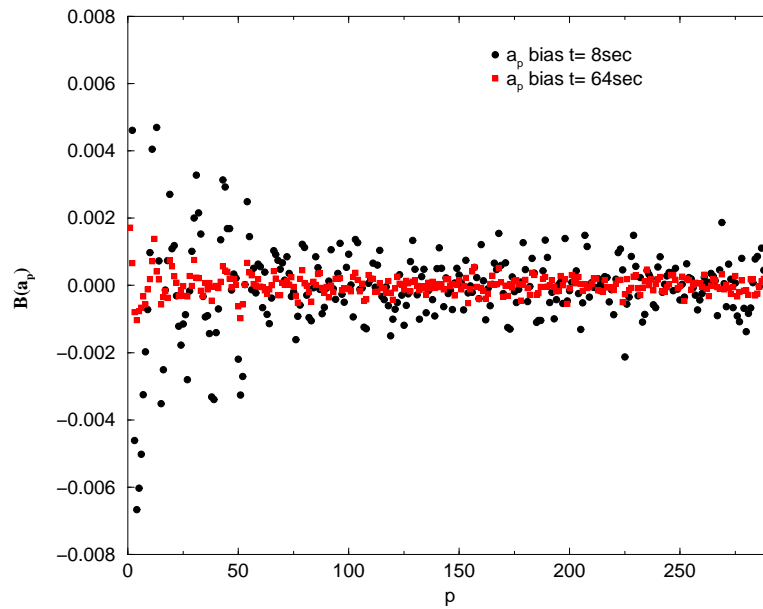
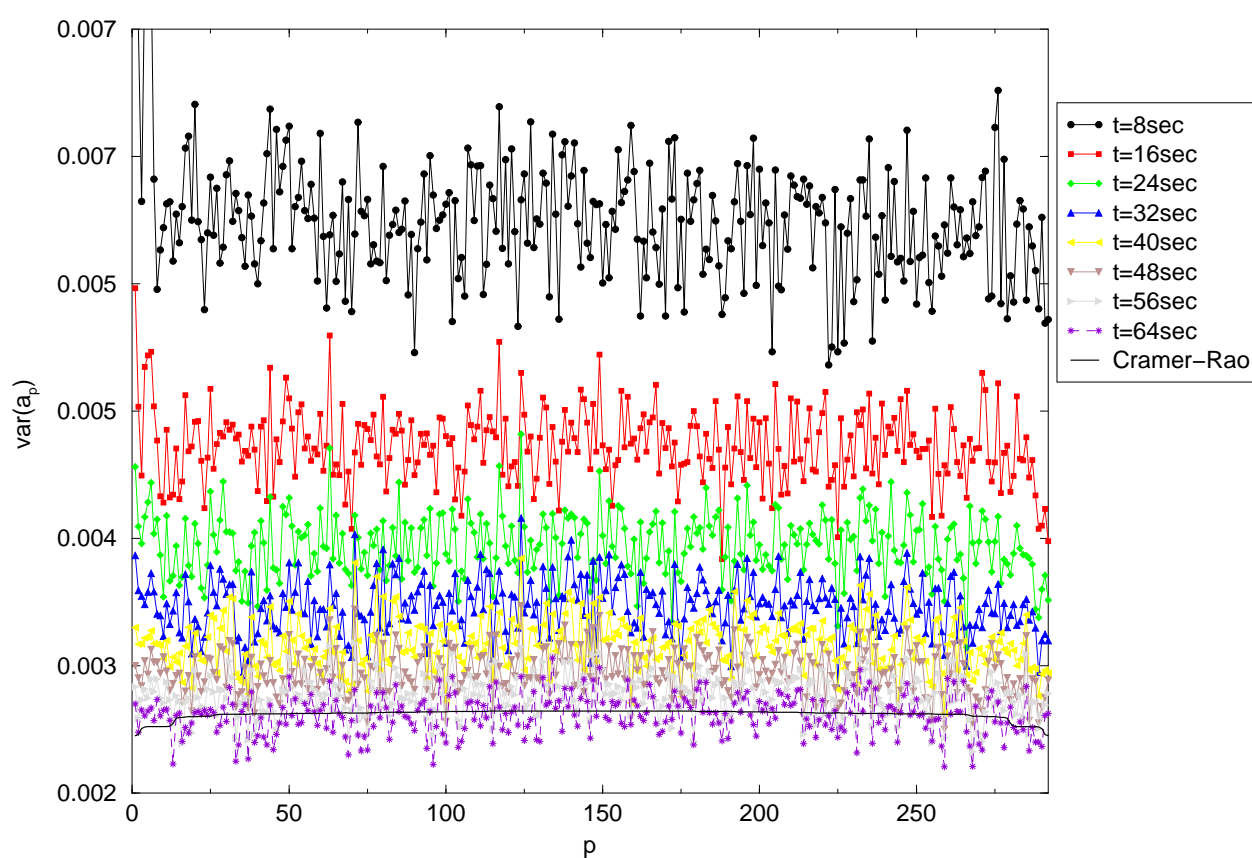


Figura 7.16: *Bias* per i parametri a_p del modello AR al tempo $t = 8\text{ sec}$ e al tempo $t = 64\text{ sec}$.

Figura 7.17: Varianza dei coefficienti a_p e limite di Cramer-Rao

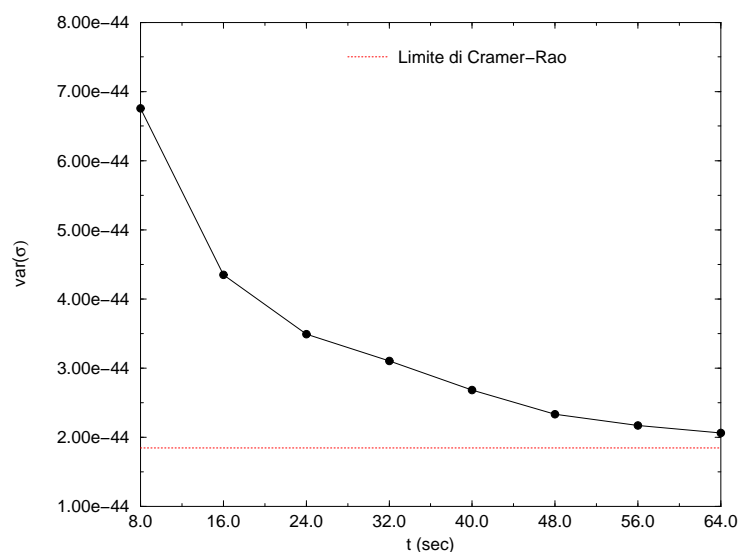


Figura 7.18: Limite di Cramer-Rao per la variabile σ del modello AR

Il senso della frase “inseguire le non stazionarietà” qui è da intendersi non come *tracking* della variazione dei parametri del modello AR, ma come capacità di stimare in tempi rapidi lo spettro di rumore per poterlo confrontare con lo spettro stimato ad un intervallo successivo.

Questo è il grande vantaggio, come abbiamo ripetutamente sottolineato, offerto dalla modellizzazione parametrica e dagli algoritmi adattivi rispetto al periodogramma, per il quale occorre avere una sequenza molto lunga di dati per avere una buona stima spettrale.

7.4 Esempio di identificazione adattiva di un sistema che varia nel tempo

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come sia possibile inseguire in linea le lente non stazionarietà del rumore. In questa sezione vogliamo mostrare alcuni risultati preliminari che abbiamo ottenuto [58] valutando le capacità dell'algoritmo LSL nell'identificare sistemi che variano nel tempo. Questo può risultare utile anche per problemi legati al “controllo” dell'apparato sperimentale, ossia alle procedure che permettono di tenere l'interferometro sulla frangia nera dell'interferenza.

Per verificare le capacità di *tracking* dell'algoritmo LSL, abbiamo cominciato a studiare il comportamento dell'algoritmo su alcuni semplici modelli di rumore in cui i coefficienti del modello AR utilizzato per la modellizzazione variassero nel tempo più velocemente del tempo di convergenza dell'algoritmo LSL nel caso stazionario.

Modello I Consideriamo un modello AR(2) con i parametri

a_1	a_2	σ
0.7	0.1	1.0

Tabella 7.1: Parametri AR del modello I

e con lo spettro di potenza di figura 7.19.

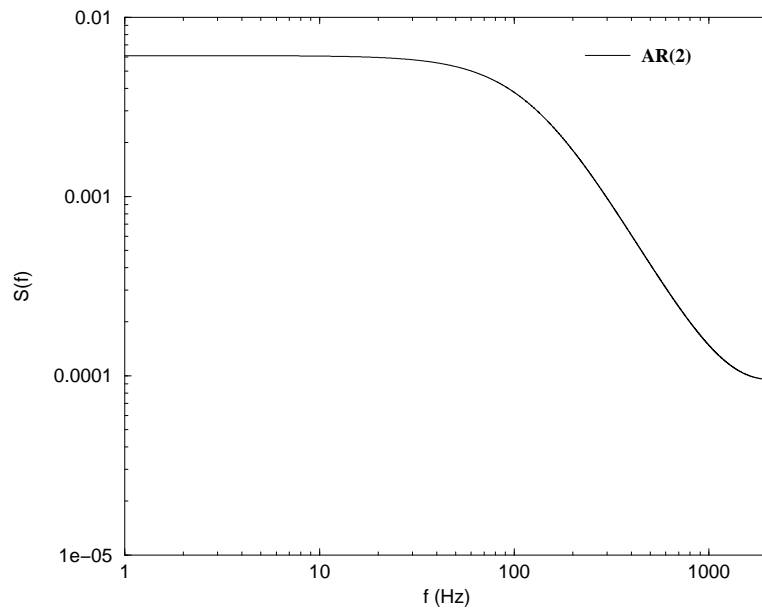


Figura 7.19: Spettro del modello AR(2)

Facciamo variare i coefficienti a_1 e a_2 nel tempo con le seguenti leggi

$$a_1[t] = \begin{cases} a_1[0] & \text{per } t \leq t_0 \\ 0.8 & \text{per } t_0 < t < t_1 \\ a_1[0](1 + A_1 \sin(2\pi\nu_1 t)) & \text{per } t \geq t_1 \end{cases} \quad (7.70)$$

per il primo coefficiente e

$$a_2[t] = a_2[0](1 + A_2 \sin(2\pi\nu_2 t)) \quad (7.71)$$

per il secondo coefficiente, scegliendo i seguenti valori per i parametri

$$A_1 = 0.03 \quad \nu_1 = 0.02 \text{ Hz} \quad (7.72)$$

$$A_2 = 0.5 \quad \nu_2 = 0.01 \text{ Hz} \quad (7.73)$$

Scegliamo un parametro di *forgetting* $\lambda = 0.9999$. In figura 7.20 riportiamo i risultati ottenuti. Se scegliamo un valore troppo piccolo del parametro λ l'algoritmo segue le non stazionarietà,

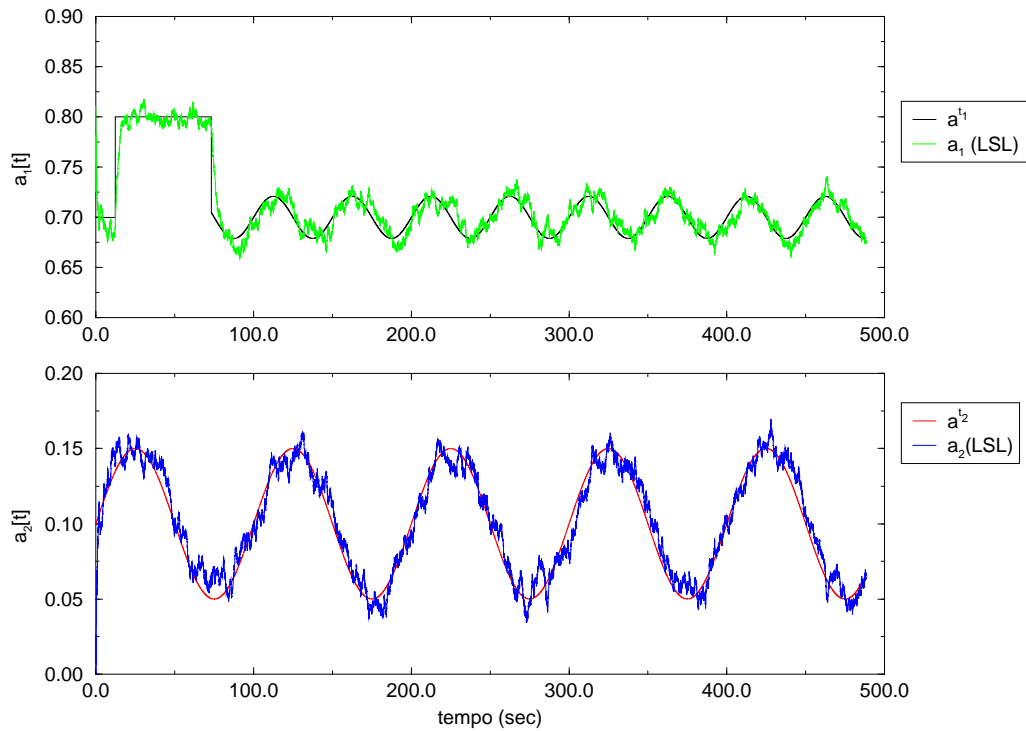


Figura 7.20: Coefficienti $a_1[t]$, $a_2[t]$ e coefficienti stimati con l'algoritmo LSL

ma molto rumorosamente. Se invece lo scegliamo troppo vicino ad 1 l'algoritmo fallisce nell'inseguimento delle non stazionarietà. Nonostante il rumore presente nella stima dei coefficienti a_p , l'algoritmo LSL riesce a seguire tutte le variazioni dei parametri nel tempo.

Modello II Consideriamo ora uno spettro caratterizzato da una sola risonanza come quello generato dal solo modo di violino a 327 Hz presente nello spettro di VIRGO riportato in figura 7.21. Con un modello AR sono sufficienti due soli parametri per descrivere tale spettro.

a_1	a_2	σ
1.7536	-0.9999	$6.63 \cdot 10^{-23}$

Tabella 7.2: Parametri AR del modello II

In figura 7.21 mostriamo lo spettro ottenuto con i parametri della tabella 7.2 e quello ottenuto con i parametri stimati con l'algoritmo LSL nel caso stazionario con $\lambda = 1.0$.

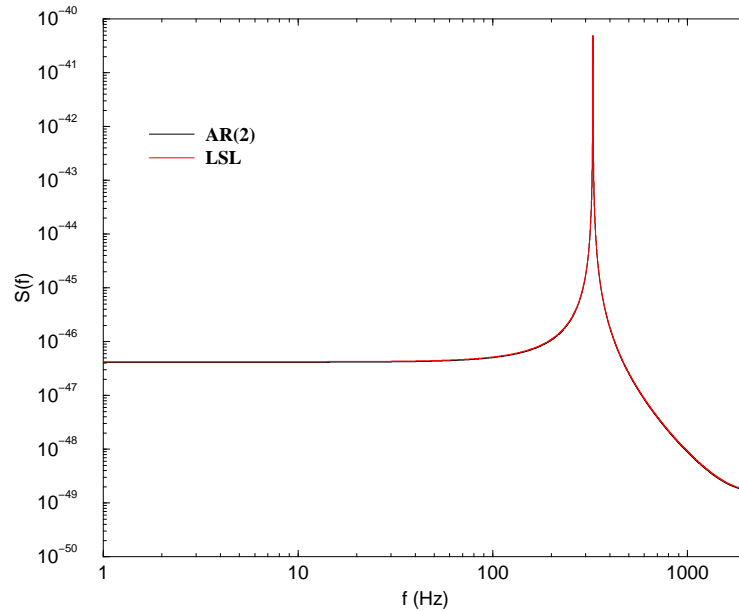


Figura 7.21: Spettro di un solo modo di violino

Supponiamo che uno dei due coefficienti AR cambi nel tempo con la legge

$$a_1[t] = a_1[0](1.0 + A \sin(2\pi\nu t)) , \quad (7.74)$$

mentre il secondo rimanga costante nel tempo. Tale oscillazione causerà una analogia oscillazione della frequenza di risonanza con la stessa legge. Scegliamo i parametri seguenti

$$a_1[0] = 1.7536 \quad (7.75)$$

$$A = 0.1 \quad (7.76)$$

$$\nu = 0.1 \text{ Hz} \quad (7.77)$$

per il primo coefficiente. Scegliamo inoltre $\lambda = 0.9997$ come parametro di *forgetting*.

In figura 7.22 riportiamo i risultati ottenuti per il *tracking* dei coefficienti ed in figura 7.23 il *tracking* della frequenza di risonanza. È evidente che l'algoritmo LSL riesce a seguire la legge temporale con cui variano i coefficienti e la frequenza.

Sottolineiamo che questi sono risultati preliminari e che, se pur promettenti, non ci assicurano che si abbiano le stesse prestazioni nel caso di modelli AR con un ordine alto come per il rumore di VIRGO. In questi semplici modelli non abbiamo fatto alcuna ipotesi sull'origine fisica

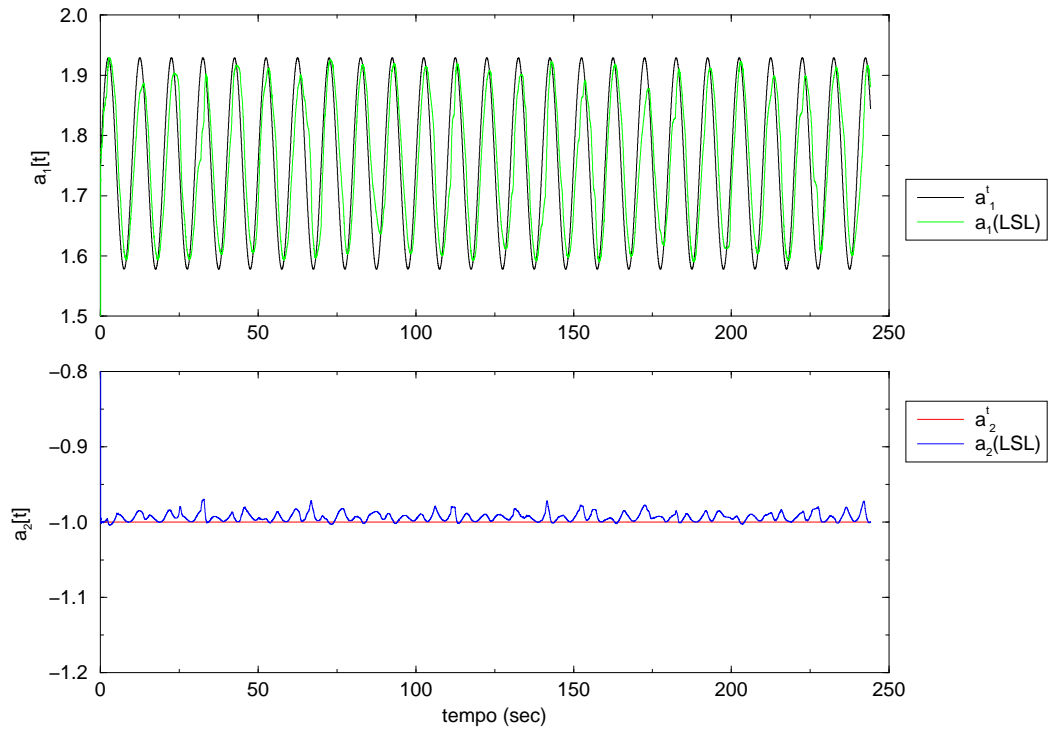


Figura 7.22: *Tracking* dell'algoritmo LSL delle oscillazioni dei coefficienti AR.

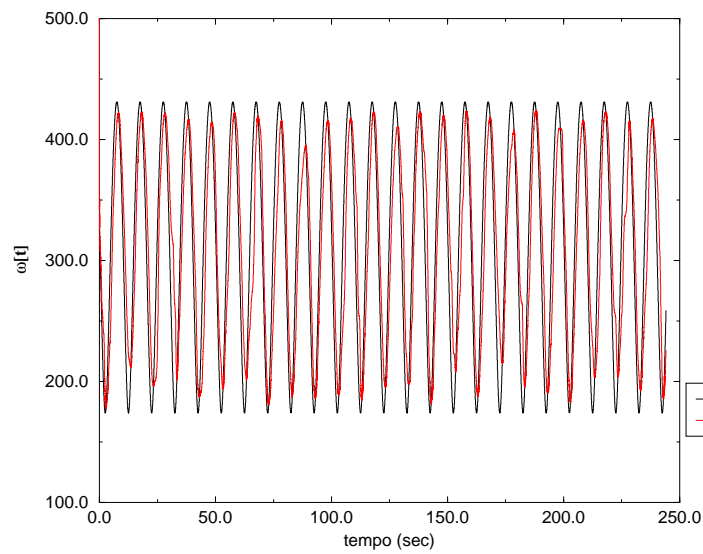


Figura 7.23: *Tracking* dell'algoritmo LSL della oscillazione della frequenza di risonanza.

del variazione temporale dei parametri del sistema e quindi hanno solo il ruolo di *toy-models*. Nella situazione in cui si vuole identificare adattivamente un sistema dell'apparato sperimentale (come può accadere per i problemi del controllo), occorre innanzitutto comprendere l'origine di tali variazioni dei parametri, per poter verificare le capacità di *tracking* dell'algoritmo su una situazione realistica.

Conclusioni

In questa tesi sono stati affrontati problemi legati all'analisi dei dati dell'esperimento interferometrico di rivelazione di onde gravitazionali VIRGO. Il problema principale dell'esperimento VIRGO, come di tutti gli esperimenti di rivelazione di onde gravitazionali, è il basso valore del rapporto segnale-rumore che caratterizza i dati da analizzare.

Nella prima parte della tesi, nelle ipotesi di gaussianità e stazionarietà del rumore, abbiamo studiato il filtraggio ottimale nell'approccio alla Bayes per sequenze di dati in cui cerchiamo un segnale transiente come quello generato dal fenomeno di coalescenza di stelle binarie oppure un segnale periodico come quello generato da pulsar. Dato il basso rapporto-segnale rumore e quindi l'alta probabilità di falsi allarmi per l'analisi di tali segnali è necessaria una grande potenza di calcolo se si vuole effettuare un'analisi di *triggering* in linea. Per questo motivo abbiamo proposto l'utilizzo del supercalcolatore APEmille valutando l'efficienza dell'implementazione degli algoritmi ottimali di Wiener (per la ricerca dei segnali di coalescenza) e di Lomb (per la ricerca di segnali periodici).

Inoltre abbiamo valutato le prestazioni di algoritmi sub-ottimali quali l'analisi in *wavelet* per la rivelazione di segnali gravitazionali transienti. Tale analisi, pur essendo sub-ottimale rispetto al filtro di Wiener, è interessante perché robusta rispetto alla scelta dell'ordine post-newtoniano del segnale gravitazionale di coalescenza con cui effettuare la ricerca.

Tutti gli algoritmi proposti presuppongono la conoscenza del rumore del rivelatore per poter effettuare un'operazione di *whitening* del rumore, operazione necessaria per pesare i dati in maniera statisticamente corretta.

Il rumore di un apparato sperimentale complesso come VIRGO è dovuto al contributo di diverse sorgenti, quali il rumore termico delle masse test, dei fili di sospensione, il rumore shot del laser, il rumore simico, il rumore Newtoniano, di cui, in questa tesi, abbiamo ricavato in maniera dettagliata il contributo alla curva di sensibilità di VIRGO. Conoscere il rumore vuol dire conoscere la statistica della sua distribuzione. Se siamo nelle ipotesi di gaussianità e stazionarietà, allora la statistica del secondo ordine, ossia la funzione di correlazione o lo spettro, è sufficiente per identificare la distribuzione del rumore.

Nella seconda parte della tesi ci siamo pertanto occupati degli estimatori spettrali. Abbiamo

valutato i vantaggi dell'impiego di tecniche parametriche per la stima spettrale rispetto all'analisi classica offerta dal periodogramma.

In particolare abbiamo studiato la modellizzazione parametrica nella classe dei modelli con funzione di trasferimento razionale con poli e zeri (ARMA). In tale classe di modelli abbiamo verificato che è possibile modellizzare lo spettro di rumore di VIRGO con un numero relativamente piccolo di parametri.

Concentrandoci sulla classe dei modelli autoregressivi (AR) abbiamo visto che con circa 300 parametri è possibile parametrizzare lo spettro di rumore di VIRGO. La modellizzazione dello spettro di rumore di VIRGO come un processo AR ci ha permesso di costruire un filtro di *whitening* in linea, grazie all'algoritmo di Durbin, che fornisce in uscita i dati di rumore "bianchi", avendo in ingresso una realizzazione del rumore di VIRGO. Il filtro di *whitening* che abbiamo utilizzato è un filtro con struttura a reticolo, ossia un filtro costituito da un numero di stadi pari al numero di coefficienti del nostro modello AR.

L'ipotesi di stazionarietà del rumore è un'ipotesi che molto probabilmente non sarà verificata per i dati sperimentali del rivelatore VIRGO. Ci siamo quindi posti il problema di come ottenere una stima spettrale del rumore di VIRGO in questa situazione. La stima spettrale classica con il periodogramma richiede l'acquisizione di lunghe sequenze di dati per ottenere una buona risoluzione e di una media su diversi periodogrammi per avere una varianza piccola. D'altro canto anche le tecniche parametriche richiedono la stima della funzione di correlazione dei dati per poter identificare i parametri del modello.

La soluzione può essere trovata se si utilizzano tecniche adattive. Con le tecniche adattive possiamo, per un modello AR dei dati in ingresso, trovare i parametri direttamente utilizzando la sequenza dei dati, senza dovere stimare prima la funzione di correlazione. Inoltre il filtro adattivo che stima in linea i parametri è anche un filtro di *whitening*, perché fornisce in uscita la parte di rumore bianca dei dati in ingresso.

Abbiamo analizzato sia algoritmi adattivi basati sul metodo del gradiente stocastico che algoritmi adattivi basati sul metodo dei minimi quadrati. In particolare sono stati studiati gli algoritmi con la struttura a reticolo: GAL (*gradient adaptive lattice*) per i metodi del gradiente e LSL (*least squares lattice*) per i metodi dei minimi quadrati.

L'algoritmo GAL si è dimostrato inefficiente nella stima spettrale del rumore di VIRGO e quindi anche come filtro di *whitening*, l'algoritmo LSL invece ha evidenziato ottime prestazioni.

In particolare l'algoritmo LSL ha mostrato di poter essere efficientemente impiegato per la stima spettrale in linea dello spettro di rumore di VIRGO e quindi come filtro di *whitening*. Tale algoritmo infatti

- converge al valore vero dei parametri del modello AR dopo solo un minuto di dati;
- è un estimatore efficiente perché soddisfa il criterio di Cramer-Rao.

Tale rapida convergenza ci può permettere (speriamo!) di seguire le lente (dell'ordine dell'ora) non stazionarietà del rumore, nel senso che ci mette in grado di avere una stima spettrale utilizzando campioni di dati relativamente corti sui quali le lente non stazionarietà non sono visibili, ma che in stime spettrali ad intervalli diversi possono essere osservate.

Nell'implementazione del filtro LSL, abbiamo visto, può essere utilizzato un parametro di *forgetting* per poter inseguire i parametri di un sistema anche in presenza di non stazionarietà. Abbiamo cominciato a studiare, per l'algoritmo LSL, la capacità di *tracking* della variazione temporale dei coefficienti di modelli AR, concentrandoci su modelli AR di ordine piccolo [58]. I risultati preliminari che abbiamo ottenuto per modelli AR di ordine 2 mostrano che scegliendo un opportuno parametro di *forgetting*, l'algoritmo LSL è in grado di seguire anche brusche variazioni dei coefficienti AR. Tali risultati costituiscono un buon inizio per uno studio successivo dell'argomento.

Ringraziamenti

Voglio ringraziare Giancarlo Cella, Andrea Viceré e Matteo Beccaria per il loro sostegno e la loro preziosa collaborazione.

In particolare ringrazio Giancarlo Cella per la sua amicizia e la sua costante presenza nei momenti importanti di questa tesi di dottorato.

Appendice A

Le equazioni delle onde gravitazionali

In quello che segue scriveremo tutte le equazioni, se non esplicitamente detto diversamente, ponendo $G = 1$ e $c = 1$.

A.1 Le equazioni linearizzate di Einstein

Le equazioni di Einstein legano la metrica dello spazio-tempo al tensore energia impulso $T_{\mu\nu}$ attraverso la relazione

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} , \quad (\text{A.1})$$

dove l'informazione metrica è contenuta nel tensore di Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, essendo $R_{\mu\nu}$ e R rispettivamente il tensore e lo scalare di Ricci e $g_{\mu\nu}$ il tensore metrico.

Nel caso di deboli campi gravitazionali possiamo sviluppare linearmente la metrica dello spazio-tempo intorno alla metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (\text{A.2})$$

per ottenere le equazioni di campo linearizzate. Definiamo [3]

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (\text{A.3})$$

e analogamente per ogni tensore

$$\bar{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R . \quad (\text{A.4})$$

Notiamo quindi che $G_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu}$ al primo ordine in $h_{\mu\nu}$ e che vale $\bar{\bar{h}}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Le equazioni linearizzate del campo diventano:

$$-\bar{h}^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} + \bar{h}^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \bar{h}^{\alpha}_{\nu\alpha,\mu} = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

Il primo termine in queste equazione è il d'Alambertiano nello spazio piatto mentre gli altri termini servono per mantenere l'equazione gauge-invariante.

Possiamo quindi imporre una scelta di gauge

$$\bar{h}_{,\alpha}^{\mu\alpha} = 0, \quad (\text{A.6})$$

con la quale le equazioni di Einstein diventano

$$-h_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

Se consideriamo l'equazione per la propagazione delle onde nel vuoto si ha

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} \equiv \bar{h}_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Le coordinate della teoria linearizzata non sono completamente determinate fissando $h_{\mu,\alpha}^{\alpha} = 0$. Infatti un cambiamento infinitesimo di coordinate $x^{\mu'} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$, non modifica la condizione $\bar{h}_{,\alpha}^{\mu\alpha} = 0$ se $\xi_{\beta}^{\alpha,\beta} = 0$. Rimane quindi un'ambiguità legata a questi cambiamenti di gauge ξ^{μ} .

La più semplice soluzione all'equazione (A.8) è la soluzione di onda piana monocromatica

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \Re\{A_{\mu\nu} \exp(ik_{\alpha}x^{\alpha})\}, \quad (\text{A.9})$$

dove l'ampiezza $A_{\mu\nu}$ ed il vettore d'onda k_{μ} soddisfano

$$k_{\alpha}k^{\alpha} = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$A_{\mu\alpha}k^{\alpha} = 0 \quad (\text{A.11})$$

Le componenti indipendenti dell'ampiezza $A_{\mu\nu}$ sono due. Delle dieci iniziali, quattro sono assorbite dalla condizione di ortogonalità (A.11); delle rimanenti 6, quattro possono essere assorbite fissando una specifica gauge per il vettore d'onda $\xi^{\mu} \equiv -iC^{\mu} \exp(ik_{\alpha}x^{\alpha})$ il quale può cambiare arbitrariamente quattro delle sei componenti dell'ampiezza $A_{\mu\nu}$.

La gauge TT (transverse-traceless) Oltre alle condizioni (A.11), dobbiamo porre altre quattro condizioni per fissare il sistema di coordinate rigidamente. A tale scopo possiamo scegliere una quadrivelocità u^{μ} non in un particolare evento, ma la stessa in tutto lo spazio tempo e con questa porre $A_{\mu\nu}u^{\nu} = 0$. Una ulteriore condizione si ha ponendo $A_{\mu}^{\mu} = 0$. A questo punto rimangono solo due componenti indipendenti di $A_{\mu\nu}$ che costituiscono i due possibili stati di polarizzazione dell'onda. Con tali condizioni il tensore $h_{\mu\nu}$ diventa un tensore trasverso e a traccia nulla (TT).

In questa gauge le componenti spazio-temporali del tensore di Riemann hanno una forma semplice

$$R_{j0k0} = -\frac{1}{2}h_{jk,00}^{TT}. \quad (\text{A.12})$$

Effetto di un'onda gravitazionale sulla distanza tra due particelle di prova Consideriamo l'effetto di un'onda gravitazionale sulla distanza tra due particelle di prova poste in A ed in B investite da un'onda gravitazionale h^{TT} ed analizziamo come l'osservatore in A vede "oscillare" la sua distanza da B. Poniamo in A un sistema di riferimento proprio non rotante. Al passaggio di un'onda gravitazionale, la distanza che separa A e B viene modificata come

$$\frac{d^2}{d\tau^2}(x_B^j - x_A^j) = -R_{j0k0}(x_B^k - x_A^k), \quad (\text{A.13})$$

dove $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ è il tensore di Riemann. Con il sistema di riferimento scelto vale $x_A = 0$ e la derivata covariante $d^2 d\tau^2$ si riduce alla derivata usuale. Ricordando la relazione (A.12) si ha

$$\frac{d^2 x_B^j}{dt^2} = \frac{\partial^2 h_{jk}^{TT}}{\partial t^2} x_B^k. \quad (\text{A.14})$$

Supponendo che prima dell'arrivo dell'onda gravitazionale le due particelle fossero ferme l'una rispetta all'altra, possiamo integrare l'equazione precedente, ottenendo:

$$\delta x^j = \frac{1}{2} h_{jk}^{TT} x^k. \quad (\text{A.15})$$

A.1.1 Polarizzazione di un'onda gravitazionale

Consideriamo un'onda gravitazionale piana che si propaga lungo la direzione z ; nella gauge TT le uniche componenti non nulle sono

$$h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT} = \Re\{A_+ e^{-i\omega(t-z)}\}, \quad (\text{A.16})$$

$$h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT} = \Re\{A_\times e^{-i\omega(t-z)}\}, \quad (\text{A.17})$$

dove le ampiezze A_+ e A_\times rappresentano i due modi indipendenti di polarizzazione. Per onde polarizzate linearmente i tensori unitari di polarizzazione sono dati da

$$\mathbf{e}_+ \equiv \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y, \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{e}_\times \equiv \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x. \quad (\text{A.19})$$

Per un'onda gravitazionale polarizzata circolarmente i tensori unitari sono invece

$$\mathbf{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ + i\mathbf{e}_\times), \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{e}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ - i\mathbf{e}_\times). \quad (\text{A.21})$$

La forma generale di un'onda gravitazionale sarà data da una sovrapposizione dei due stati di polarizzazione con ampiezze h_+ e h_\times

$$h_{jk}^{TT} = h_+ e_{jk}^+ + h_\times e_{jk}^\times. \quad (\text{A.22})$$

Si può notare che ruotando gli assi x e y del piano trasversale alla direzione di propagazione dell'onda di un angolo ϕ le ampiezze dell'onda gravitazionale vengono modificate come

$$h_+^\phi = h_+ \cos 2\phi + h_\times \sin 2\phi, \quad (\text{A.23})$$

$$h_\times^\phi = -h_+ \sin 2\phi + h_\times \cos 2\phi. \quad (\text{A.24})$$

È evidente che l'onda gravitazionale è invariante rispetto ad una rotazione di un angolo π rispetto alla sua direzione di propagazione. Questo può essere anche riaffermato dicendo che le particelle a massa nulla associate al campo di radiazione gravitazionale, ossia i gravitoni, hanno spin 2.

A.2 Campo gravitazionale esterno ad una stella di massa M

La metrica dello spazio tempo all'esterno di una stella di massa M e raggio R è la metrica di Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - 2M/r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{A.25})$$

Nella regione dello spazio tempo $r \gg r_s = 2M$, dove la metrica è quasi piatta, vale la teoria della gravità di Newton ed il potenziale Newtoniano è dato da

$$\Phi = -\frac{M}{r} \quad \text{per} \quad r > R \text{ e } r \gg r_s. \quad (\text{A.26})$$

Appendice B

Classificazione delle onde di background sismico

Per ottenere una stima del rumore sismico consideriamo il terreno come un mezzo omogeneo limitato dal piano $z = 0$. Possiamo espandere il generico modo del terreno in onde elastiche che sono soluzione dell'equazione

$$\partial_t^2 u_i(x, t) = c_T^2 \partial_k \partial_k u_i(x, t) + (c_L^2 - c_T^2) \partial_i \partial_k u_k(x, t) . \quad (\text{B.1})$$

Queste soluzioni rappresentano onde longitudinali con velocità c_L e onde trasverse con velocità c_T . Il campo $u_i(x, t)$ rappresenta lo spostamento di un punto dalla sua posizione originale x nella direzione i .

Le condizioni al contorno per il tensore degli sforzi σ_{ij} devono essere

$$\sigma_{xz}(x, y, 0) = \sigma_{yz}(x, y, 0) = \sigma_{zz}(x, y, 0) = 0 , \quad (\text{B.2})$$

cioè consideriamo la superficie al piano $z = 0$ libera di muoversi. Possiamo soddisfare queste condizioni sovrapponendo alcune soluzioni di onde piane con la stessa frequenza ω e la stessa proiezione $\vec{k} = (k_x, k_y)$ del vettore d'onda nel piano $z = 0$. Grazie alla simmetria del problema, senza perdere di generalità possiamo prendere $k_y = 0$ per l'analisi. La più generale combinazione con queste proprietà può essere scritta come

$$u = \epsilon^{(L,+)} e^{ikx + ik_L z - i\omega t} + \epsilon^{(T,+)} e^{ikx + ik_T z - i\omega t} + \epsilon^{(L,-)} e^{ikx - ik_L z - i\omega t} + \epsilon^{(T,-)} e^{ikx - ik_T z - i\omega t} \quad (\text{B.3})$$

con

$$k^2 + k_T^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2}, \quad k^2 + k_L^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} . \quad (\text{B.4})$$

Utilizziamo la parametrizzazione

$$\epsilon^{(L,+)} = \alpha(k, 0, k_L)$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^{(T,+)} &= \beta(-k_T, 0, k) + \gamma(0, k, 0) \\
\epsilon^{(L,-)} &= \alpha'(k, 0, -k_L) \\
\epsilon^{(T,-)} &= \beta'(k_T, 0, k) + \gamma'(0, k, 0) ,
\end{aligned} \tag{B.5}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ sono ampiezze complesse, e solo la parte reale dell' Eq. (B.3) ha significato fisico. Le polarizzazioni $\epsilon^{(L,+)}$ e $\epsilon^{(L,-)}$ si riferiscono ai due modi longitudinali e sono paralleli al vettore d'onda, mentre $\epsilon^{(T,+)}$ e $\epsilon^{(T,-)}$ si riferiscono ai quattro modi trasversali e sono perpendicolari al vettore d'onda.

Le condizioni (B.2) riscritte per il campo di spostamento u diventano, tenendo conto dell'indipendenza dalla coordinata y ,

$$\begin{aligned}
\partial_x u_z + \partial_z u_x &= 0 \\
\partial_z u_y &= 0 \\
c_L^2 \partial_z u_z + (c_L^2 - 2c_T^2) \partial_x u_x &= 0
\end{aligned} \tag{B.6}$$

o

$$\begin{aligned}
k(\epsilon_z^{(L,+)} + \epsilon_z^{(T,+)} + \epsilon_z^{(L,-)} + \epsilon_z^{(T,-)}) + k_L \epsilon_x^{(L,+)} + k_T \epsilon_x^{(T,+)} - k_L \epsilon_x^{(L,-)} - k_T \epsilon_x^{(T,-)} &= 0 \\
k_L \epsilon_y^{(L,+)} + k_T \epsilon_y^{(T,+)} - k_L \epsilon_y^{(L,-)} - k_T \epsilon_y^{(T,-)} &= 0 \\
(c_L^2 - 2c_T^2)k(\epsilon_x^{(L,+)} + \epsilon_x^{(T,+)} + \epsilon_x^{(L,-)} + \epsilon_x^{(T,-)}) + \\
c_L^2(k_L \epsilon_z^{(L,+)} + k_T \epsilon_z^{(T,+)} - k_L \epsilon_z^{(L,-)} - k_T \epsilon_z^{(T,-)}) &= 0 .
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Usando la parametrizzazione (B.5) otteniamo le condizioni

$$\begin{aligned}
kk_T(\gamma - \gamma') &= 0 \\
2kk_L(\alpha - \alpha') + (k^2 - k_T^2)(\beta + \beta') &= 0 \\
(k^2(c_L^2 - 2c_T^2) + c_L^2 k_L^2)(\alpha + \alpha') + 2c_T^2 k k_T(\beta - \beta') &= 0
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Nel caso particolare $k = 0$ queste condizioni si semplificano,

$$\beta + \beta' = 0, \quad \alpha + \alpha' = 0 \tag{B.9}$$

e la combinazione (B.3) si divide in due modi indipendenti: un'onda longitudinale ed un'onda trasversale con un vettore d'onda perpendicolare al piano, completamente riflesso da esso.

Nel caso $k \neq 0$ a frequenza fissata ω la prima equazione di (B.8) può essere scritta come

$$k_T(\gamma - \gamma') = 0 . \tag{B.10}$$

Se $k^2 < \omega^2/c_T^2$ questo dà un modo puramente trasverso che è la sovrapposizione di un'onda incidente e di una completamente riflessa, per $k^2 = \omega^2/c_T^2$ il vettore d'onda totale diventa completamente parallelo al piano $z = 0$. Riferendoci alla figura B.1 indichiamo questo modo con

$\mu = 1$. Nell'ultimo caso $k^2 > \omega^2/c_T^2$, il vettore d'onda k_T diventa immaginario e noi abbiamo una combinazione non fisica che cresce esponenzialmente con la profondità.

Le ultime due equazioni in (B.8) accoppiano un modo trasversale ed uno longitudinale. Se $k^2 < \omega^2/c_L^2$ k_L e k_T sono reali, abbiamo due modi che possono essere descritti come

1. Un'onda incidente puramente longitudinale ($\beta = 0$), che è riflessa dal piano $z = 0$ come una sovrapposizione di un'onda trasversale e di una longitudinale. Indichiamo questo modo con $\mu = 2$.
2. Un'onda incidente puramente trasversale ($\alpha = 0$). Come nel primo caso, l'onda uscente è la sovrapposizione di un'onda trasversale e di una longitudinale. Indichiamo questo modo con $\mu = 3$.

Se $\omega^2/c_L^2 < k^2 < \omega^2/c_T^2$, k_T è reale ma k_L è immaginario. Per escludere la soluzione esponenzialmente crescente abbiamo bisogno della condizione aggiuntiva $\alpha = 0$. Esiste così solo un unico modo, che indichiamo con $\mu = 4$, che può essere descritto come un'onda incidente puramente trasversale che è riflessa come una sovrapposizione di un'onda uscente trasversale ed un'onda di superficie esponenzialmente smorzata con la profondità.

L'ultimo caso corrisponde a $\omega^2/c_T^2 < k^2$. Sia k_L che k_T sono immaginari, così abbiamo bisogno solo di due condizioni aggiuntive $\alpha' = 0$ e $\beta' = 0$. Il sistema (B.8) diventa omogeneo in α, β ed è solubile se il suo determinante è zero; questo dà la condizione:

$$x^3 - 8x^2 + 8x(3 - 2\xi) + 16(\xi - 1) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad x = \frac{\omega^2}{k^2 c_T^2}, \quad (\text{B.11})$$

dove ξ è il quadrato del rapporto tra la velocità trasversa e quella longitudinale

$$\xi = \frac{c_T^2}{c_L^2}, \quad 0 < \xi < \frac{1}{2}. \quad (\text{B.12})$$

C'è solo una soluzione dell'Eq. (B.11), per un dato valore di ξ , che corrisponde ad un'onda di superficie sovrapposizione di un modo trasversale ed uno longitudinale, entrambi esponenzialmente smorzati con la profondità (Onde di Raleigh). Le equazioni (B.11) fissano anche la ampiezza relativa delle due componenti come

$$\beta = \alpha \frac{2kk_L}{k^2 - k_T^2} = \alpha \frac{2}{x - 2} \sqrt{\xi x - 1}. \quad (\text{B.13})$$

Come discusso nel capitolo 3 questo è probabilmente il modo più importante da un punto di vista pratico, così lo indichiamo con $\mu = 0$ (vedi Figure B.1). Quello che abbiamo ottenuto è una completa classificazione dei modi elastici di background, che, nello spazio (\vec{k}, ω, z) , può essere riassunta nel modo seguente

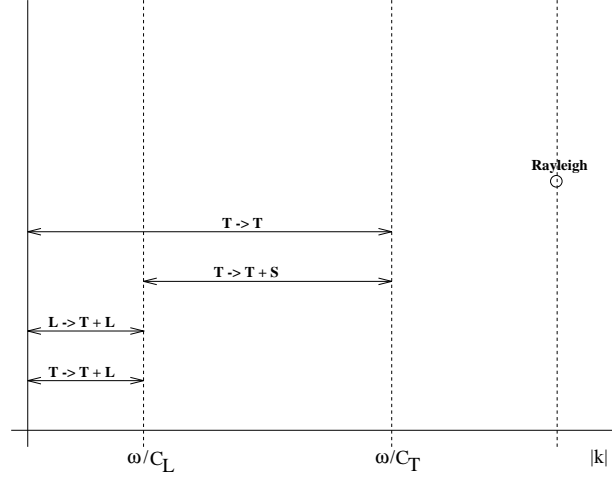


Figura B.1: Modi elastici.

$$\begin{pmatrix} \vec{u}(\vec{k}, \omega, z) \\ u_z(\vec{k}, \omega, z) \end{pmatrix} = \sum_{\mu} \left\{ A_{\mu}(\vec{k}, \omega) \begin{pmatrix} \vec{k} \cos k_L z - k_T f_2 \hat{n}_k \cos k_T z \\ i k_L \sin k_L z + i k f_2 \sin k_T z \end{pmatrix} \right. \\ \left. + B_{\mu}(\vec{k}, \omega) \begin{pmatrix} i \vec{k} \sin k_L z - i k_T f_1 \hat{n}_k \sin k_T z \\ k_L \cos k_L z + k f_1 \cos k_T z \end{pmatrix} + C_{\mu}(\vec{k}, \omega) \begin{pmatrix} \epsilon \vec{k} \cos k_T z \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{B.14})$$

Qui abbiamo introdotto la parametrizzazione $A = \alpha + \alpha'$, $B = \alpha - \alpha'$ and $C = \gamma + \gamma'$, mentre i parametri f_1, f_2 sono definiti come

$$f_1 = \frac{2k k_L}{k_T^2 - k^2}, \quad f_2 = \frac{(2c_T^2 - c_L^2)k^2 - c_L^2 k_L^2}{2c_T^2 k k_T}. \quad (\text{B.15})$$

Siamo particolarmente interessati al modo $\mu = 0$, quindi ci interesseremo a questo caso. Il modulo del vettore \vec{k} è fissato in un unico modo da ω , così a frequenza fissata sommiamo solo sulle direzioni \hat{n}_k , ottenendo

$$\vec{u}(x, \omega) = \sum_{\hat{n}_K} A_0(\hat{n}_k, \omega) \hat{n}_k \left(k e^{i k_L z} - 2k \frac{k_L k_T}{k_T^2 - k^2} e^{i k_T z} \right) e^{i \vec{k} \vec{x}} \quad (\text{B.16})$$

$$u_z(x, \omega) = \sum_{\hat{n}_K} A_0(\hat{n}_k, \omega) \left(k_L e^{i k_L z} + 2k_L \frac{k^2}{k_T^2 - k^2} e^{i k_T z} \right) e^{i \vec{k} \vec{x}} \quad (\text{B.17})$$

con

$$k = \frac{\omega}{c_T} \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$\begin{aligned}
k_L &= -i \frac{\omega}{c_T} \sqrt{\frac{1}{x} - \xi} \\
k_T &= -i \frac{\omega}{c_T} \sqrt{\frac{1}{x} - 1} .
\end{aligned} \tag{B.18}$$

B.1 Somma sui modi

Se restringiamo la somma solo sui modi di superficie, è possibile valutarla in forma finita se assumiamo l'isotropia delle funzioni di correlazioni. Il risultato può essere espresso in termini di funzioni di Bessel come segue:

$$G^S(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = J_0\left(\frac{\omega}{c_T \sqrt{x}} |x_1 - x_2|\right) \tag{B.19}$$

$$G_x^V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = J_1\left(\frac{\omega}{c_T \sqrt{x}} |x_1 - x_2|\right) \cos(\theta_{12}) \tag{B.20}$$

$$G_y^V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = J_1\left(\frac{\omega}{c_T \sqrt{x}} |x_1 - x_2|\right) \sin(\theta_{12}) \tag{B.21}$$

$$G_{xx}^T(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{2} J_0\left(\frac{\omega}{c_T \sqrt{x}} |x_1 - x_2|\right) - \frac{1}{2} J_2\left(\frac{\omega}{c_T \sqrt{x}} |x_1 - x_2|\right) \cos(2\theta_{12}) \tag{B.22}$$

$$G_{yy}^T(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{2} J_0\left(\frac{\omega}{c_T \sqrt{x}} |x_1 - x_2|\right) + \frac{1}{2} J_2\left(\frac{\omega}{c_T \sqrt{x}} |x_1 - x_2|\right) \cos(2\theta_{12}) \tag{B.23}$$

$$G_{xy}^T(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = -\frac{1}{2} J_2\left(\frac{\omega}{c_T \sqrt{x}} |x_1 - x_2|\right) \sin(2\theta_{12}) \tag{B.24}$$

Qui abbiamo definito l'angolo θ_{12} che è la direzione del vettore $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ nel sistema di riferimento scelto.

Appendice C

Statistica degli estimatori

Sia θ un insieme di parametri reali che vogliamo stimare da un campione di dati $\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$. Un estimatore $\hat{\theta}$ è consistente se, per $N \rightarrow \infty$, $\hat{\theta}$ tende in media al valore vero θ . Consideriamo un parametro scalare $\hat{\theta}$; l'errore quadratico medio è definito come

$$mse = \mathcal{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2]. \quad (\text{C.1})$$

Definiamo *bias* di un estimatore la quantità

$$b(\theta) = \mathcal{E}(\hat{\theta}) - \theta, \quad (\text{C.2})$$

che fornisce una misura della deviazione dell'estimatore dal valore vero. Si dice che un estimatore non ha *bias* se $b(\theta) = 0$.

L'errore quadratico medio può essere scritto come somma della varianza dell'estimatore e del *bias* nel modo seguente

$$mse = \mathcal{E}\{[\hat{\theta} - \mathcal{E}(\hat{\theta})]^2\} + \{\mathcal{E}(\hat{\theta}) - \theta\}^2. \quad (\text{C.3})$$

Se il *bias* dell'estimatore è zero allora l'errore quadratico medio coincide con la varianza dell'estimatore. La varianza di ogni estimatore senza *bias* è limitata inferiormente dal criterio di Cramer-Rao

C.1 Criterio di Cramer-Rao

Se $p(\mathbf{x}; \theta)$ è la funzione di densità di probabilità di \mathbf{x} allora il criterio di Cramero-Rao afferma che

$$var(\hat{\theta}_i) \geq [\mathbf{I}_{\theta}^{-1}]_{ii} \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (\text{C.4})$$

dove $\hat{\theta}_i$ sono le stime dei valori veri dei parametri θ_i e \mathbf{I}_θ è la matrice di informazione di Fisher definita da

$$\mathbf{I}_\theta = \mathcal{E} \left[\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \right]. \quad (\text{C.5})$$

Un estimatore che soddisfa il criterio di Cramer-Rao è detto efficiente. È possibile costruire estimatori la cui varianza può essere più bassa del limite imposto dal criterio di Cramer-Rao, ma in tal caso dobbiamo pagare il prezzo di avere un estimatore con *bias*.

C.1.1 Criterio di Cramer-Rao per i parametri AR e per i coefficienti di riflessione

Per determinare la statistica dei parametri AR e dei coefficienti di riflessione occorre fare delle approssimazioni [43]. Per un numero N infinito di dati gli estimatori di *maximum-likelihood* non hanno *bias* e soddisfano il criterio di Cramer-Rao. Inoltre per N grande gli estimatori di *maximum-likelihood* sono distribuiti gaussianamente.

Per poter applicare tali risultati al caso di lunghezza di dati finiti occorre che i poli del modello AR non siano troppo vicini al cerchio unitario. In questo caso possiamo approssimare bene il massimo della PDF del processo AR con il massimo della distribuzione di probabilità ottenuta con le ipotesi che i dati in ingresso al filtro AR siano distribuiti gaussianamente e quindi essendo il filtro AR un filtro lineare anche i dati in uscita:

$$\begin{aligned} & p(\mathbf{x}|x[0], x[1], \dots, x[p-1]; \mathbf{a}, \sigma^2) = \\ & = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{(N-p)/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=p}^{N-1} \left(x[n] + \sum_{j=1}^p a[j]x[n-j] \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Se assumiamo che la stima dei parametri $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\sigma}$ non sia affetta da *bias* allora possiamo scrivere il limite di Cramer-Rao per i parametri $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\sigma}$

$$\text{var}(\hat{a}_i) \geq \frac{\sigma^2}{N} [\mathbf{R}_{xx}^{-1}]_{ii} \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (\text{C.7})$$

$$\text{var}(\hat{\sigma}) \geq \frac{2\sigma^2}{N}; \quad (\text{C.8})$$

e per i coefficienti di riflessione k_p

$$\text{var}(k_n) = \begin{cases} \frac{1}{N}(1 - k_n^2) & \text{for } n \leq p \\ \frac{1}{N} & \text{for } n > p \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

dove \mathbf{R}_{xx} è la matrice di correlazione $p \times p$.

Appendice D

Filtri

D.1 Trasformazione bilineare

Uno dei metodi più semplici per progettare un filtro digitale IIR con specifiche di risposta prescritte è quello di utilizzare una trasformazione bilineare [48].

L'idea è la seguente: invece di progettare direttamente il filtro digitale, mappiamo il filtro digitale in un filtro equivalente analogico (come i filtri Butterworth, Chebyshev) attraverso una trasformazione conforme

$$s = f(z), \quad (\text{D.1})$$

quindi adattiamo il filtro analogico alla specifiche richieste ed effettuiamo infine la trasformazione inversa per ritornare al filtro digitale.

Si può usare la trasformazione bilineare

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (\text{D.2})$$

per un filtro passa-basso

$$s = i\Omega = f(e^{i\omega}) = i \tan\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (\text{D.3})$$

o trasformazioni bilineari più appropriate per progettare un filtro passa alto (HP), passa banda (BP) o ferma banda (BS):

$$s = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad HP \quad (\text{D.4})$$

$$s = \frac{1 - 2cz^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}} \quad BP \quad (\text{D.5})$$

$$s = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2cz^{-1} + z^{-2}} \quad BS \quad (\text{D.6})$$

che corrispondono ad un mappa in frequenza

$$\Omega = -\cot\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad HP \quad (D.7)$$

$$\Omega = \frac{c - \cos(\omega)}{\sin(\omega)} \quad BP \quad (D.8)$$

$$\Omega = \frac{\sin(\omega)}{c - \cos(\omega)} \quad BS. \quad (D.9)$$

Il filtro analogico è mappato nel filtro digitale $H(z)$ desiderato, definendo

$$H(z) = H_a(s)|_{s=f(z)} = H_a(g(\omega)). \quad (D.10)$$

In frequenza

$$H(\omega) = H_a(\Omega)|_{\Omega=g(\omega)} = H_a(g(\omega)). \quad (D.11)$$

D.1.1 Filtri passa alto del primo ordine

Un filtro passa alto del primo ordine è della forma

$$H(z) = \frac{b}{1 + az^{-1}}, \quad (D.12)$$

ed in frequenza

$$H(\omega) = \frac{b}{1 + ae^{-j\omega}}, \quad (D.13)$$

D.1.2 Filtri shelving

Sono filtri passa-alto o passa-basso con una frequenza di taglio ed un guadagno regolabili. Per il caso passa basso abbiamo

$$H_{HP} = \frac{\left(\frac{G_0+G\beta}{1+\beta}\right) - \left(\frac{G_0-G\beta}{1+\beta}\right)z^{-1}}{1 - \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)z^{-1}}, \quad (D.14)$$

con

$$\beta = \sqrt{\frac{G_c^2 - G_0^2}{G^2 - G_c^2}} \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right). \quad (D.15)$$

Per il caso passa alto abbiamo

$$H_{HP} = \frac{\left(\frac{G_0+G\beta}{1+\beta}\right) + \left(\frac{G_0-G\beta}{1+\beta}\right)z^{-1}}{1 + \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)z^{-1}}, \quad (D.16)$$

con

$$\beta = \sqrt{\frac{G_c^2 - G_0^2}{G^2 - G_c^2}} \cot\left(\frac{\omega_c}{2}\right). \quad (D.17)$$

I parametri G_0, G_c, G, ω_c devono essere regolati per ottenere la funzione di risposta desiderata. Per il caso passa-basso G_0 è il guadagno ad $\omega = \pi$, G_c quello alla frequenza di taglio $\omega = \omega_c$ e G il guadagno ad $\omega = 0$.

D.1.3 Filtri di ordine superiore

Quando si ha bisogno di filtri che effettuino un taglio molto netto, bisogna utilizzare filtri di ordine più alto.

Per progettare un filtro con la funzione di risposta voluta, possiamo giocare con quattro parametri:

Ω_{pass} : la frequenza delimitante la banda spettrale da *lasciar passare*;

Ω_{stop} : la frequenza delimitante la banda spettrale da *fermare*

A_{pass} : l'attenuazione in decibel massima che può essere tollerata nella banda passante;

A_{stop} : l'attenuazione in decibel minima che deve essere raggiunta nella banda fermata.

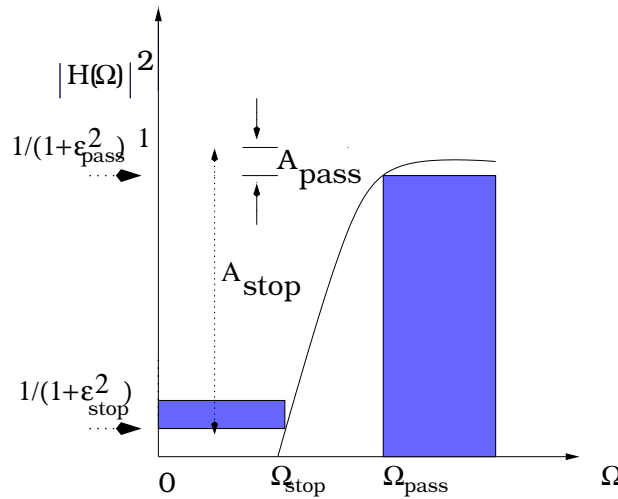


Figura D.1: Filtro passa alto

Con l'ausilio di questi parametri possiamo costruire filtri ottimali, per esempio passa basso, diminuendo A_{pass} in modo che la banda passante diventi più piatta, aumentando A_{stop} in modo tale che la banda fermata diventi più profonda ed avvicinando Ω_{stop} ad Ω_{pass} .

Supponendo che $|H(f)|^2$ sia normalizzato ad uno possiamo introdurre le quantità ϵ_{pass} ed ϵ_{stop} definendo

$$|H(\Omega_{pass})|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon_{pass}^2} = 10^{-A_{pass}/10}, \quad (D.18)$$

$$|H(\Omega_{stop})|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon_{stop}^2} = 10^{-A_{stop}/10}. \quad (D.19)$$

Le specifiche per il filtro analogico corrispondente sono $\{\Omega_{pass}, \Omega_{stop}, \epsilon_{pass}, \epsilon_{stop}\}$.

Con le trasformazioni bilineari appropriate possiamo costruire il filtro analogico passa-alto e quello passa-basso.

D.1.4 Esempio: filtri di Butterworth

I filtri di Butterworth sono caratterizzati da due parametri:

- l'ordine del filtro N ,
- la frequenza Ω_0 a 3dB.

Il loro spettro di potenza è dato da

$$|H(\Omega_0)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\Omega}{\Omega_0})^{2N}} \quad (D.20)$$

con attenuazione in decibel

$$A(\Omega) = 10 \log_{10}[1 + (\frac{\Omega}{\Omega_0})^{2N}]. \quad (D.21)$$

I parametri del filtro possono essere determinati utilizzando le specifiche $\{\Omega_{pass}, \Omega_{stop}, \epsilon_{pass}, \epsilon_{stop}\}$:

$$N = \text{Int}_{sup} \left[\frac{\ln(\epsilon_{stop}/\epsilon_{pass})}{\ln(\Omega_{stop}/\Omega_{pass})} \right], \quad (D.22)$$

$$\Omega_0 = \frac{\Omega_{pass}}{\epsilon_{pass}^{1/N}}. \quad (D.23)$$

Quindi possiamo progettare il filtro digitale partendo dal filtro analogico

$$|H(\Omega_0)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon_{pass}^2 (\frac{\Omega}{\Omega_{pass}})^{2N}} \quad (D.24)$$

Per il filtro analogico passa-alto, bisogna utilizzare le trasformazioni

$$\Omega = \cot\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (D.25)$$

$$\Omega_{pass} = \cot\left(\frac{\omega_{pass}}{2}\right), \quad (D.26)$$

$$\Omega_{stop} = \cot\left(\frac{\omega_{stop}}{2}\right), \quad (D.27)$$

dove

$$\omega = \frac{2\pi\nu}{\nu_{\text{campionamento}}} . \quad (\text{D.28})$$

Bibliografia

- [1] R.A. Hulse and J. H. Taylor. *ApJ*, 324, 1975.
- [2] J. Weber. *Phys. Rev.*, 117, 1960.
- [3] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *GRAVITATION*. Freeman and Company, New York, 1970.
- [4] Hawking S. W. Israel W. *Three hundred years of gravitation*. University Press, Cambridge, 1987.
- [5] K. S. Thorne. *Reviews of Modern Physics*, 52, 1980.
- [6] A. Lyne. *Pulsar Astronomy*. Cambridge Mass., 1993.
- [7] R. Narayan and J. P. Ostriker. Pulsar populations and their evolution. *ApJ*, 352:222–246, 1990.
- [8] S. Bonazzola and E. Gourgoulhon. Gravitational waves from pulsars: emission by the magnetic field induced distorsion. *Astronomy and Astrophysics*, 312:675–690, 1996.
- [9] M. Zimmermann and E. Szedenits. Gravitational waves from rotating and precessing rigid bodies: Simple models and applications to pulsars. *Physical Review D*, 20(2):351, luglio 1979.
- [10] Taylor J. H., Manchester R. N, Lyne A. G., and Camilo F. 1995. Unpublished work.
- [11] Taylor J. H., Manchester R. N, and Lyne A. G. *ApJS*, 88, 1993. Unpublished work.
- [12] L. Adami, M. Cerdonio, F. Ricci, and G. L. Romani. A superconductive strain transducer. *Applied Physics Letters*, 1977.
- [13] M. Cerdonio et al. *Phys. Rev. Lett*, 1993.

- [14] E. Amaldi, C. Cosmelli, and Giovanardi et al. U. Measurement of the Merit Factor Q of an Aluminium Gravitational Wave antenna between 4.2 and 1.1 K. *Nuovo Cimento*, 1977.
- [15] M. Cerdonio et al. In *Proc. of the 1th E. Amaldi International Meeting on g.w. Experiments*.
- [16] G. V. Pallottino. The cryogenic gravitational wave antennas Explorer and Nautilus. In *Proc. of the International Conference on Gravitational Waves*.
- [17] E. Coccia. Astrophysics with a spherical gravitational wave detector. In *Proc. of the International Conference on Gravitational Waves*.
- [18] Curt Cluter. Angular resolution of the lisa gravitational wave detector. *gr-qc/9703068*, 1997.
- [19] R. Del Fabbro et al. Low Frequency Behaviour of the Pisa Seismic Noise Super-Attenuator for Gravitational Wave Detection. *Phys. Lett. A*, 1989.
- [20] VIRGO collaboration. Extending the virgo gravitational wave detection band down to a few hz: metal blade springs and magnetic antisprings. *Nucl. Instrum. and Meth. in Phys. Res. A*, 394:397–408, 1997.
- [21] A. Vicere and G. Cella. Super attenuator vertical performance beyond the low frequency range. Technical report, VIR-NOT-PIS-1390-091, 1997.
- [22] G. Cella E. Cuoco et al. Relevance of newtonian noise spectrum for the virgo sensitivity. *submitted to Classical and Quantum Gravity*, 1997.
- [23] J. N. Brune and J. Oliver. The seismic noise of the earth's surface. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 49, 1959.
- [24] VIRGO collaboration. The virgo interferometer. *Classical and quantum gravity*, 14:1461, 1997.
- [25] H. B. Callen and T. A. Welton. . *Phys. Rev.*, 83, 1951.
- [26] G. Cagnoli L. Gammaitoni J. Kovalik F. Marchesoni and M. Punturo. The virgo sensitivity curve. *virgo notes, Perugia*, marzo, 1997.
- [27] P. R. Saulson. Thermal noise in mechanical experiments. *Phys. Rev. D*, 42(8), october 1990.
- [28] P. R. Saulson. Terrestrial gravitational noise on a gravitational wave antenna. *Phys. Rev. D*, 30:732–736, 1984.

- [29] L. D. Landau and E. M. Lifshits. *Teoria dell'elasticità*. Edizioni Mir, 1979.
- [30] Lee Samuel Finn. Detection, measurement, and gravitational radiation. *Phys. Rev. D*, 46(12):5236–5249, 1992.
- [31] L. A. Zubakov V. D. Wainstein. *Extraction of signals from noise*. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 1962.
- [32] K.C.B. New G. Chanmugam W.W. Johnson J.E.Tohline. Millisecond pulsars: detectable sources of continuous gravitational waves? *ApJ*, 450:757–762, 10 september 1995.
- [33] Paul Shelton Ray. *High-Sensitivity for radio pulsars*. 1995. Ph.D thesis.
- [34] B. F. Schutz. *Gravitational Wave Data Analysis*. Kluwer, Dordrecht, 1989.
- [35] B. F. Schutz and M. Tinto. Antenna patterns of interferometric detectors gravitational wave.I- Linearly polarized waves. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, 1987.
- [36] B. F. Schutz and M. Tinto. Antenna patterns of interferometric detectors gravitational waves.II - Elliptically and randomly polarized waves. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, 1987.
- [37] J. D. Scargle. *ApJ*, 263:835–853, 1982.
- [38] M. Beccaria G. Cella A. Ciampa E. Cuoco G. Curci A. Vicerè. Gravitational wave search: real time data analysis strategies on parallel computers. *Virgo Notes 96–024*, 1996.
- [39] A. Bartoloni. Apemille: a parallel processor in the teraflop range. 1995. Nota interna INFN.
- [40] J. M. Innocent and B. Torresani. A multiresolution strategy for detecting gravitational waves generated by binary coalescences. *submitted to Phys. Rev. D*, 1996.
- [41] J. M. Innocent and B. Torresani. Wavelets and Binary Coalescence Detection. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1997.
- [42] E. Cuoco and G. Curci. Some results on wavelet analysis for coalescences detection. *VIRGO NOTE, in preparation*, 1997.
- [43] S. M. Kay. *Modern Spectral Estimation*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [44] E. Cuoco and G. Curci. Modeling a VIRGO-like noise spectrum. Note I. *VIR-NOT-PIS-1390-095*, 1997.

- [45] G. Curci. Rivelazione di onde gravitazionali con interferometri a larga banda. Technical report, Lezioni tenute al VI Seminario di Fisica Teorica di Parma, 1997.
- [46] Charles W. Therrien. *Discrete random signals and statistical signal processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1992.
- [47] S. Thomas Alexander. *Adaptive Signal Processing*. Springer, New York, 1986.
- [48] S. J. Orfanidis. *Introduction to signal processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [49] M. Beccaria, E. Cuoco, and G. Curci. Adaptive Identification of VIRGO-like noise spectrum. Note II. *VIR-NOT-PIS-1390-096*, 1997.
- [50] Monson H. Hayes. *Statistical Digital Processing and Modeling*. Wiley & Sons, 1996.
- [51] S. Frasca, G. V. Pallottino, and G. Pizzella. Spectral domain data analysis for a gravitational wave antenna. In *Signal Processing III: Theories and Applications*.
- [52] A. Abramovici et al. LIGO: The laser interferometer gravitational-wave observatory. *Science*, 1992.
- [53] Bruce Allen and collaborators. *Talk given at GWDW2*, 1997.
- [54] S. Haykin. *Adaptive filter Theory*. Prentice-Hall, 1996.
- [55] B. Widrow and S. D. Stearns. *Adaptive Signal Processing*. Prentice-Hall, 1985.
- [56] M. Morf and D. T. Lee. Recursive Least Squares Ladder forms for Fast Parameter Tracking. In *IEEE Conf. on De. and Control*, 1978.
- [57] M. Morf, D. T. Lee, and B. Friedlander. Recursive Least Squares Ladder Estimation Algorithms. *IEEE Transactions on Acous., Speech, and Signal Processing*, 1981.
- [58] E. Cuoco and G. Curci. Tracking of time-varying autoregressive processes. *VIRGO NOTE, in preparation*, 1997.